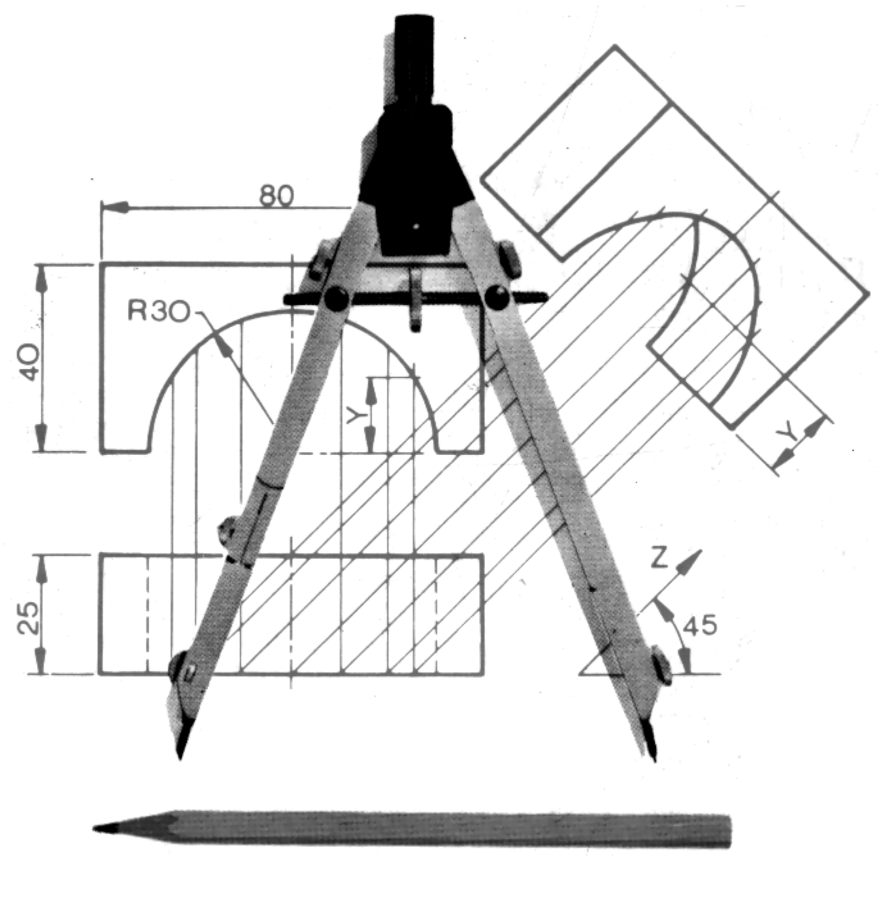
CPM - Programa de Certificação de Pessoal de Caldeiraria

Caldeiraria

Matemática Aplicada



Matemática Aplicada - Caldeiraria

Trabalho realizado em parceria SENAI / CST (Companhia Siderúrgica de Tubarão)

Coordenação Geral	Luís Cláudio Magnago Andrade (SENAI) Marcos Drews Morgado Horta (CST)
Supervisão	Alberto Farias Gavini Filho (SENAI) Wenceslau de Oliveira (CST))
Elaboração	Carlos Roberto Sebastião (SENAI)
Aprovação	Silvino Valadares Neto (CST) Nelson de Brito Braga (CST)
Editoração	Ricardo José da Silva (SENAI)

SENAI - Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial
DAE - Divisão de Assistência às Empresas
Departamento Regional do Espírito Santo
Av. Nossa Senhora da Penha, 2053 - Vitória - ES.
CEP 29045-401 - Caixa Postal 683
Telefone: (027) 325-0255
Telefax: (027) 227-9017

CST - Companhia Siderúrgica de Tubarão
AHD - Divisão de Desenvolvimento de Recursos Humanos
AV. Brigadeiro Eduardo Gomes, s/n, Jardim Limoeiro - Serra - ES.
CEP 29160-972
Telefone: (027) 348-1322
Telefax: (027) 348-1077

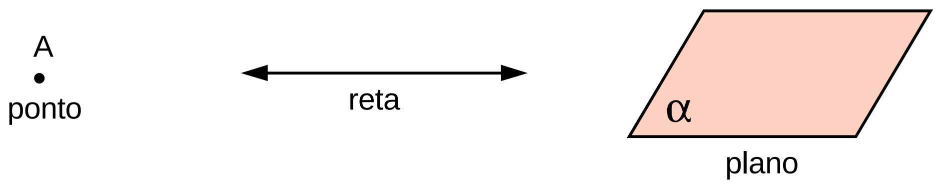
Sumário

Introdução à Geometria

Ponto, Reta e Plano

Representação:

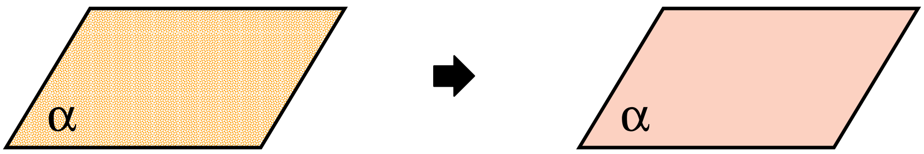
- Ponto - letras maiúsculas do nosso alfabeto: A, B, C, ...
- Reta - letras minúsculas do nosso alfabeto: a, b, c, ...
- Plano - letras gregas minúsculas: α, β, γ, ...



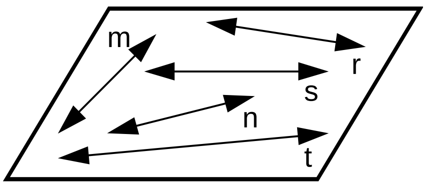
Considerações importantes:

a) Numa reta há infinitos pontos.

b) Num plano há infinitos pontos.

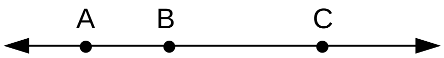


b) Num plano existem infinitas retas.

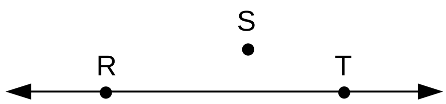


Pontos Colineares

Os pontos pertencentes a uma mesma reta são chamados ***colineares***.



*Os pontos **A**, **B** e **C** são colineares*



*Os pontos **R**, **S** e **T** não são colineares*

Figura Geométrica

- Toda ***figura geométrica*** é um conjunto de pontos.
- ***Figura geométrica plana*** é uma figura em que todos os seus pontos estão num mesmo plano.

Exercícios

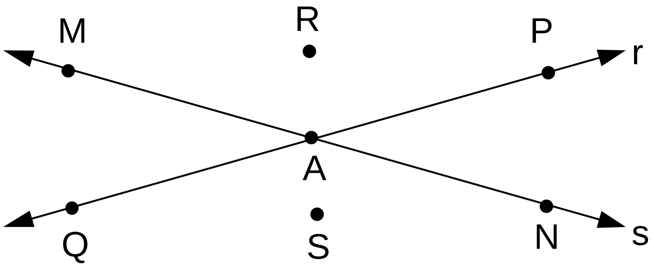
1) Quais são os elementos fundamentais da Geometria ?

2) Quantos pontos podemos marcar num plano ?

3) Quantas retas podemos traçar num plano ?

4) Por dois pontos distintos quantas retas podemos traçar ?

5) Observe a figura e responda:



a) Quais dos pontos pertencem à reta **r** ?

b) Quais dos pontos pertencem à reta **s** ?

c) Quais dos pontos pertencem às retas **r** e **s** ?

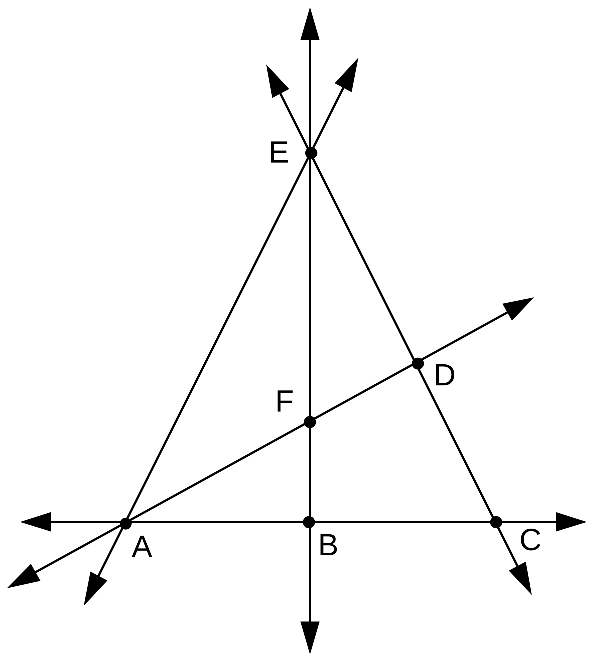
6) Observe a figura e complete:

a) Os pontos **A**, **F** e ___ são colineares.

b) Os pontos **E**, **F** e ___ são colineares.

c) Os pontos **C**, ___ e **E** são colineares.

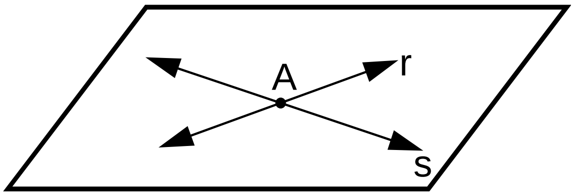
d) os pontos ___, **B** e **C** são colineares.



Posições relativas de duas Retas no Plano

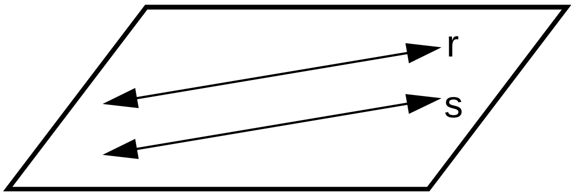
Duas retas distintas contidas em um plano podem ser:

a) ***retas concorrentes***: quando têm um único ponto comum.



r ∩ s = { A }

a) ***retas paralelas***: quando não têm ponto comum.

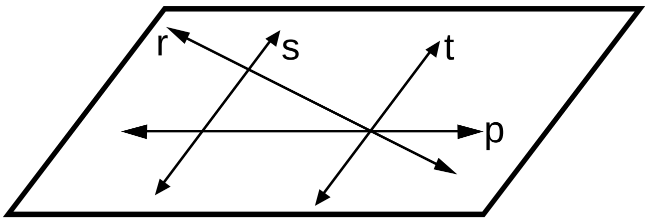


r ∩ s = ∅

Exercícios

1) Quais das afirmações abaixo são verdadeiras ?

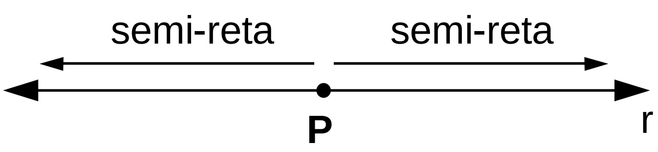
a) r e s são concorrentes
b) r e t são concorrentes
c) s e t são paralelas
d) s e p são paralelas



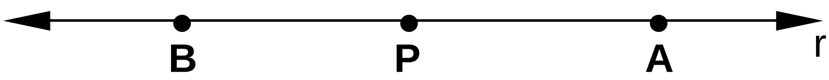
s ∩ t = ∅

Semi-reta

Um ponto **P** qualquer de uma reta **r** divide esta reta em duas partes denominadas semi-retas de origem **P**.



Para distinguir as semi-retas, vamos marcar os pontos **A** e **B** pertencentes a cada semi-reta.



$\overrightarrow{PA}$ - semi-reta de origem **P** e que passa pelo ponto **A**.

$\overrightarrow{PB}$ - semi-reta de origem **P** e que passa pelo ponto **B**.

Segmento

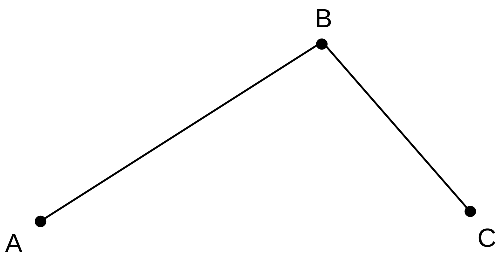
Um segmento de reta de extremidades **A** e **B** é o conjunto dos pontos que estão entre elas, incluindo as extremidades.

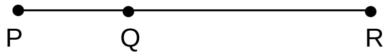
Indica-se o segmento AB por $\overline{AB}$

Segmentos Consecutivos

Dois segmentos de reta que têm uma extremidade comum são chamados ***consecutivos***.

Exemplo:





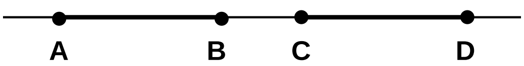
$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos

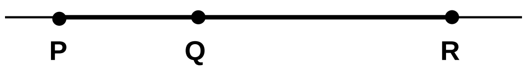
$\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ são consecutivos

Segmentos Colineares

Dois segmentos de reta são colineares se estão numa mesma reta.

Exemplo:





$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares

$\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ são colineares (e consecutivos)

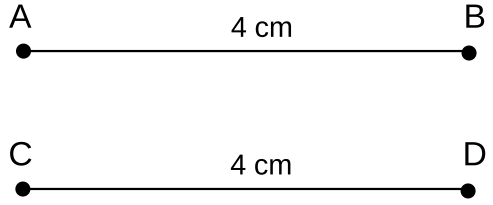
Segmentos Congruentes

Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem medidas iguais.

Indicação:

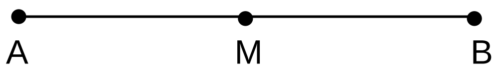
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Significa: $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{CD}$



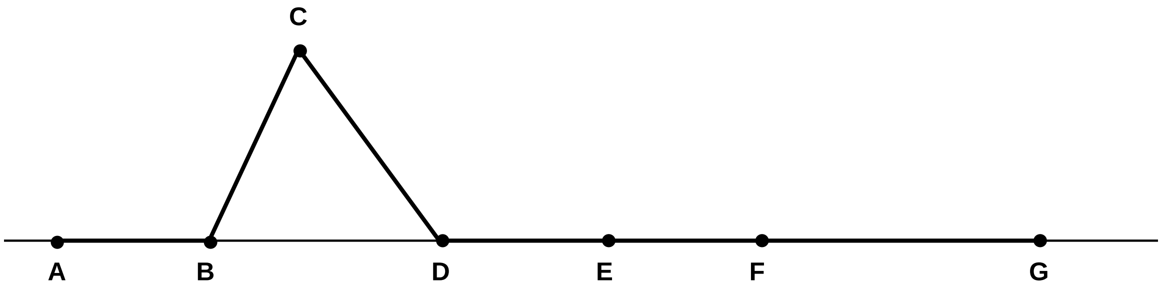
Ponto médio de um segmento

Um ponto **M** é chamado ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ se **M** está entre **A** e **B** e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.



Exercícios

1) Observe a figura abaixo e escreva se os segmentos são consecutivos, colineares ou adjacentes (consecutivos e colineares):



a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ =

b) $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ =

c) $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ =

d) $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ =

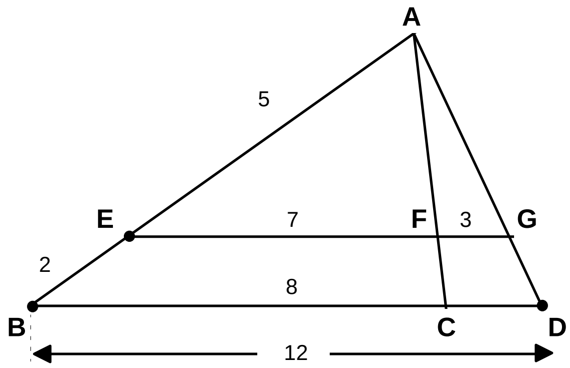
e) $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ =

f) $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$ =

g) $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$ =

h) $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$ =

2) Observe a figura e responda:

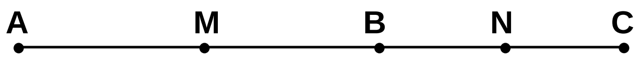


a) Qual a medida do segmento $\overline{EG}$?

b) Qual a medida do segmento $\overline{AB}$?

c) Qual a medida do segmento $\overline{CD}$?

2) Na figura abaixo, **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$ e **N** é o ponto médio de $\overline{BC}$. Se $\overline{AB}$ mede 6cm e $\overline{BC}$ mede 4cm.



a) Qual é a medida de $\overline{AM}$?

b) Qual é a medida de $\overline{BN}$?

c) Qual é a medida de $\overline{MN}$?

d) Qual é a medida de $\overline{AN}$?

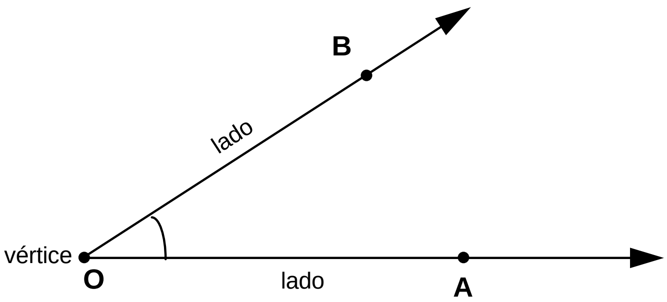
Ângulos

Definição

Ângulo é a reunião de duas semi-retas de mesma origem e não-colineares.

Na figura:

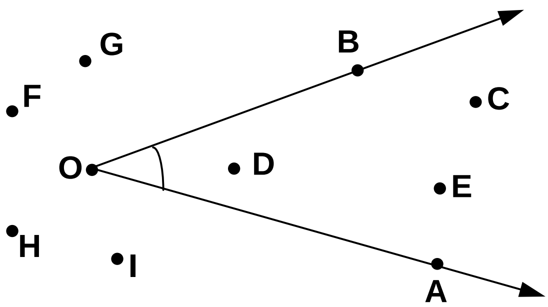
- **O** é o vértice.
- $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ são os lados



Indicação do ângulo: AÔB, ou BÔA ou simplesmente Ô.

Pontos internos e Pontos externos a um Ângulo

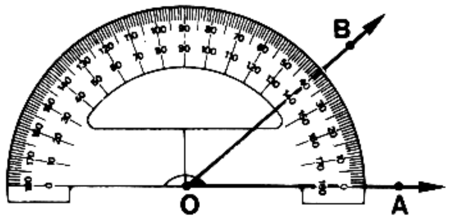
Seja o ângulo AÔB



- Os pontos C, D e E são alguns dos pontos internos ao ângulo AÔB.
- Os pontos F, G, H e I são alguns dos pontos externos ao ângulo AÔB.

Medida de uma ângulo

Um ângulo pode ser medido de um instrumento chamado ***transferidor*** e que tem do ***grau*** como unidade. O ângulo AÔB da figura mede 40 graus.



Indicação:

m (AÔB) = 40º

A unidade grau tem dois submúltiplos: ***minuto*** e ***segunda***.

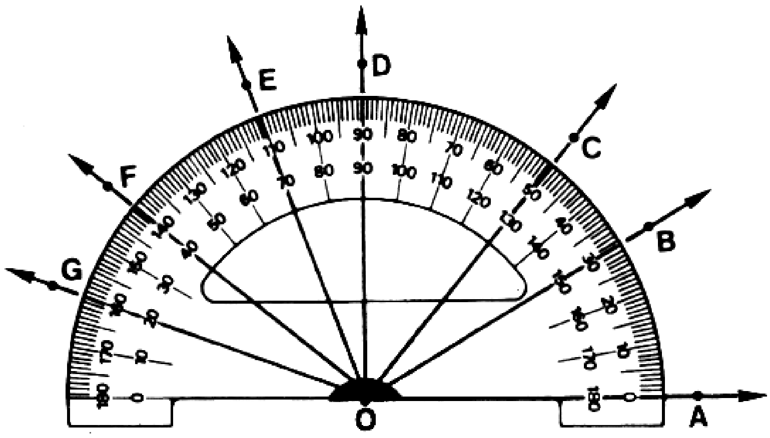
1 grau tem 60 minutos (indicação: 1º = 60’)
1 minuto tem 60 segundos (indicação: 1’ = 60”)

Simbolicamente:

- Um ângulo de 25 graus e 40 minutos é indicado por 25º 40’
- Um ângulo de 12 graus, 20 minutos e 45 segundos é indicado por 12º 20’ 45”.

Exercícios

1) Escreva as medidas em graus dos ângulos indicados pelo transferidor:



a) m (AÔB) =

b) m (AÔB) =

c) m (AÔB) =

d) m (AÔB) =

a) m (AÔB) =

b) m (AÔB) =

c) m (AÔB) =

d) m (AÔB) =

Operações com medidas de ângulos

Adição

1) Observe os exemplos:

17º 15’ 10” + 30º 20’ 40”

$$\begin{array}{r} 17º\ 15'\ 10'' \\ +\ \underline{30º\ 20'\ 40''} \\ 47º\ 35'\ 50'' \end{array}$$

2)

13º 40’ + 30º 45’

$$\begin{array}{r} 13º\ 40' \\ +\ \underline{30º\ 45'} \\ 43º\ \cancel{85}' \\ +\ \underline{1º\ 25'} \\ 44º\ 25' \end{array}$$

Exercícios

1) Calcule as somas:

a) 49º + 65º =
b) 12º 25’ + 40º 13’ =
c) 28º 12’ + 52º 40’ =
d) 25º 40’ + 16º 50’ =
e) 23º 35’ + 12º 45’ =
f) 35º 10’ 50” + 10º 25’ 20” =
g) 31º 45’ 50” + 13º 20’ 40” =
h) 3º 24’ 9” + 37º 20’ 40” =

Subtração

Observe os exemplos:

1)

58º 40’ - 17º 10’

```
   58º 40’
-  17º 10’
   -------
   41º 30’
```

2)

80º - 42º 30’

```
   79º 60’
-  42º 30’
   -------
   37º 30’
```

Exercícios

1) Calcule as diferenças:

a) 42º - 17º =
b) 48º 50’ = 27º 10’ =
c) 12º 35’ - 13º 15’ =
d) 30º - 18º 10’ =

a) 90º - 54º 20’ =
b) 120º - 50º 20’ =
c) 52º 30’ = 20º 50’ =
d) 39º 1’ - 10º 15’ =

Multiplicação de um ângulo por um número

Observe os exemplos:

1) 17º 15' x 2

$$\begin{array}{r} 17^\circ\ 15' \\ \underline{\times\quad 2} \\ 34^\circ\ 30' \end{array}$$

2) 24º 20' x 3

$$\begin{array}{l} 24^\circ\ 20' \\ \underline{\times\qquad 3} \\ 72^\circ\ \cancel{60}' \\ \underline{1^\circ\qquad\ } \\ 73^\circ \end{array}$$

Nota: "Não há multiplicação entre ângulos." $\cancel{90^\circ \times 90^\circ} = ?$

Exercícios

1) Calcule os produtos:

a) 25º 10' x 3 =
b) 44º 20' x 2 =
c) 35º 10' x 4 =
d) 16º 20' x 3 =

a) 28º 30' x 2 =
b) 12º 40' x 3 =
c) 15º 30' x 3 =
d) 14º 20' x 5 =

Divisão de um ângulo por um número

Observe os exemplos:

36º 30' ÷ 3

$$\begin{array}{ll|l} 36^\circ & 30' & 3 \\ \hline 0 & 0 & 12^\circ\ 10' \end{array}$$

39º 20' ÷ 4

$$\begin{array}{rr|l} 39^\circ & 20' & 4 \\ \hline 3^\circ & \underline{180'} & 9^\circ\ 50' \\ & 200' & \\ & 00 & \end{array}$$

Nota: "Não há divisão entre ângulos." $\cancel{90^\circ \div 20^\circ} = ?$

Exercícios

1) Calcule os quocientes:

a) 48º 20' ÷ 4 =
b) 45º 30' ÷ 3 =
c) 75º 50' ÷ 5 =

a) 55º ÷ 2 =
b) 90º ÷ 4 =
c) 22º 40' ÷ 5 =

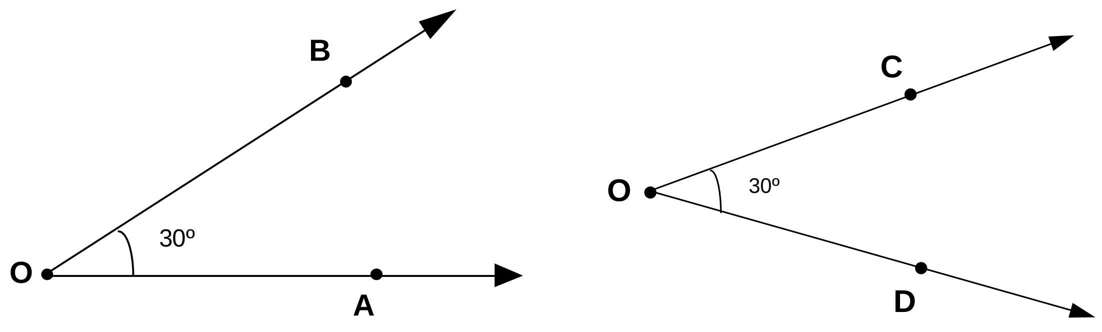
2) Calcule:

a) $\frac{2}{3}$ de 45º =
b) $\frac{5}{7}$ de 84º =

a) $\frac{3}{4}$ de 48º 20' =
b) $\frac{3}{2}$ de 15º 20' =

Ângulos Congruentes

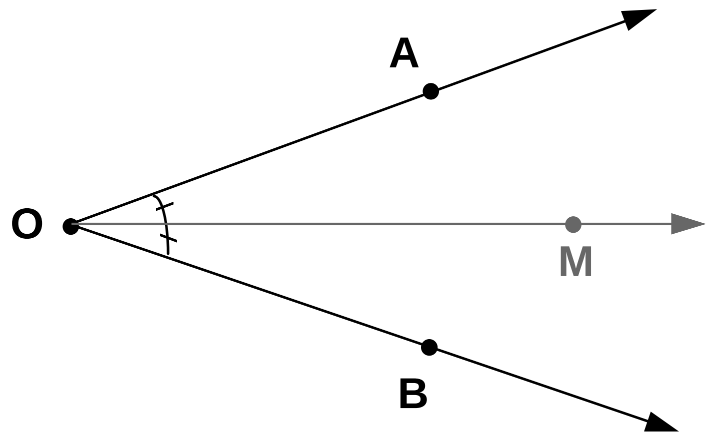
Dois ângulos são ***Congruentes*** se as suas medidas são iguais.



Indicação: AÔB $\cong$ (***significa***: AÔB é congruente a CÔD)

Bissetriz de um ângulo

Bissetriz de um ângulo é a semi-reta com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois outros ângulos congruentes.

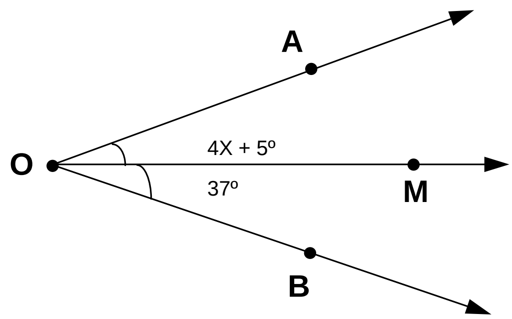


Se AÔM $\cong$ MÔB, então $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de AÔB.

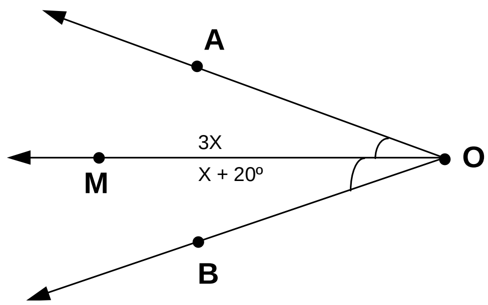
Exercícios

1) Calcule **x** em cada caso, sabendo-se que $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz do ângulo dado.

a)

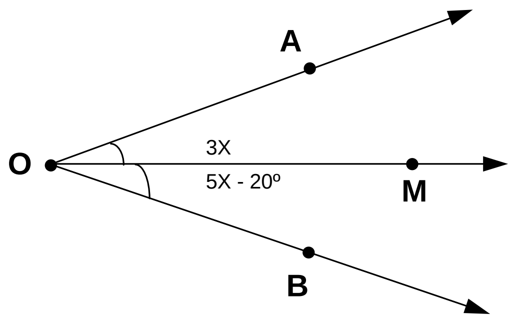


b)

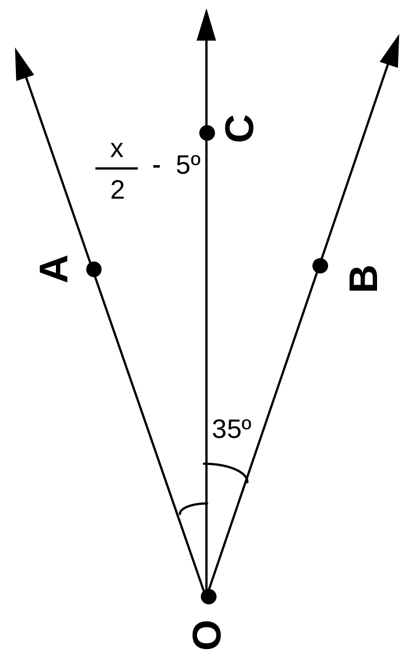


2) Calcule **x** em cada caso, sabendo-se que $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo dado.

a)



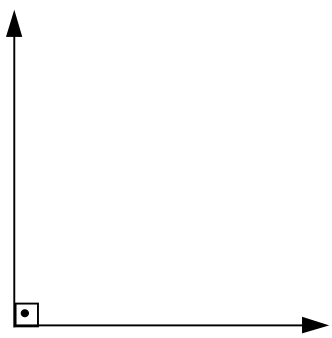
b)



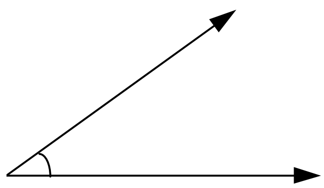
Ângulos Reto, Agudo e Obtuso

Os ângulos recebem nomes especiais de acordo com suas medidas:

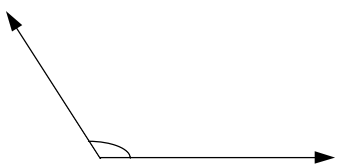
- Ângulo reto é aquele cuja medida é 90º.
- Ângulo agudo é aquele cuja medida é menor que 90º.
- Ângulo obtuso é aquele cuja medida é maior que 90º.



ÂNGULO RETO



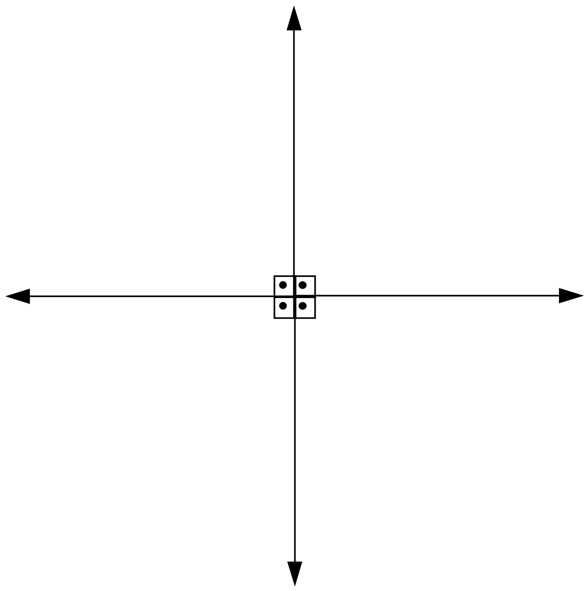
ÂNGULO AGUDO



ÂNGULO OBTUSO

Retas Perpendiculares

Quando duas retas se interceptam formando ângulos retos, dizemos que elas são ***perpendiculares***.



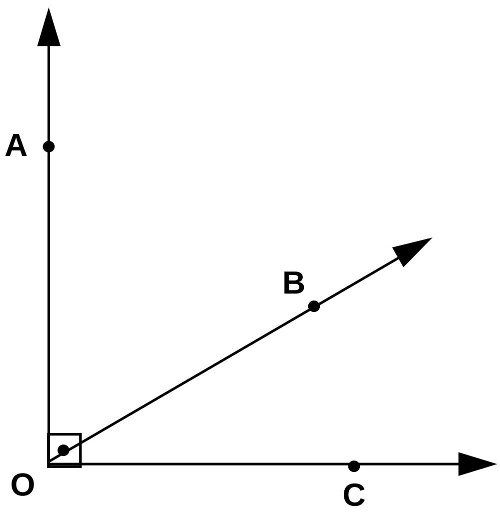
Indicação: **r** $\perp$ **s**

Significa: **r** perpendicular a **s**.

Ângulos Complementares

Dois ângulos são ***complementares*** quando a soma de suas medidas é 90º.

m (AÔB) + m (BÔC) = m (AÔC)



Exemplos:

- 65º e 25º são ângulos complementares, porque 65º + 25º = 90º
- 40º e 50º são ângulos complementares, porque 40º + 50º = 90º

Exercícios:

1) Resolva as equações abaixo, onde a incógnita **x** é um ângulo (medido em graus):

a) $2x = 90^o$
b) $4x + 10^o = 90^o$
c) $5x - 20^o = 1^o + 2x$
d) $x = 2(90^o - x)$
e) $4(x + 3^o) = 20^o$
f) $(3x - 20^o) + 50^o = 90^o$
g) $3(x + 1^o) = 2(x + 7^o)$
h) $2x + 2(x + 1^o) = 4^o + 3(x + 2^o)$

2) Observe o exemplo abaixo e resolva as seguintes questões:

- Calcular a medida de um ângulo cuja medida é igual ao dobro do seu complemento.

Solução:

Medida do ângulo = x

Medida do complemento do ângulo = 90º - x

$$x = 2\,(90^o - x)$$

Resolvendo a equação:

$$\begin{aligned} x &= 2(90^o - x) \\ x &= 180^o - 2x \\ x + 2x &= 180^o \\ 3x &= 180^o \\ x &= 60^o \end{aligned}$$

Resposta: 60º

a) A medida de um ângulo é igual à medida de seu complemento. Quanto mede esse ângulo ?

b) A medida de um é a metade da medida do seu complemento. Calcule a medida desse ângulo.

c) Calcule a medida de um ângulo cuja medida é igual ao triplo de seu complemento.

d) A diferença entre o dobro da medida de um ângulo e o seu complemento é 45º. Calcule a medida desse ângulo.

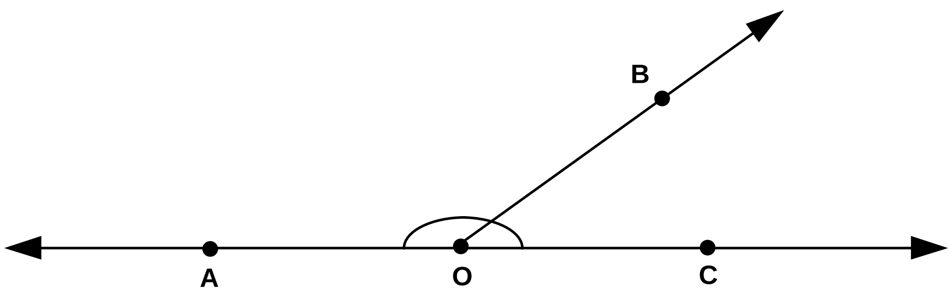
e) A terça partes do complemento de um ângulo mede 20º. Qual a medida do ângulo ?

f) Dois ângulos complementares têm suas medidas expressas em graus por 3x + 25º e 4x - 5º. Quanto medem esses ângulos ?

Ângulos Suplementares

Dois ângulos são ***suplementares*** quando a soma de suas medidas é 180º.

m (AÔB) + m (BÔC) = 180º



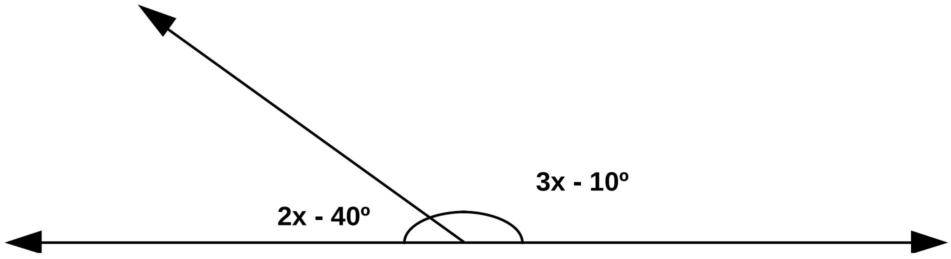
Exemplos:

- 50º e 130º são ângulos suplementares, porque 50º + 130º = 180º
- 125º e 55º são ângulos suplementares, porque 125º + 55º = 180º

Exercícios:

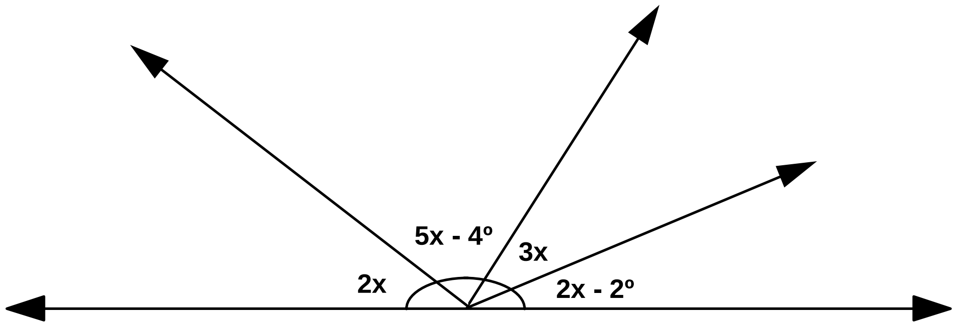
1) Determine **x**, sabendo que os ângulos são suplementares:

a)



2) Calcule **x**:

a)



3) A quarta parte da medida de um ângulo mede 30º. Calcule a medida do seu suplemento.

4) A medida de um ângulo é igual à medida de seu suplemento. Calcule esse ângulo.

5) Calcule a medida de um ângulo que é igual ao triplo de seu suplemento.

6) O dobro da medida de um ângulo é igual à medida do suplemento desse ângulo. Calcule a medida do ângulo.

7) O triplo da medida de um ângulo mais a medida do suplemento desse ângulo é 250º

8) Calcule a medida de um ângulo cuja medida é igual a $\frac{2}{3}$ do seu suplemento.

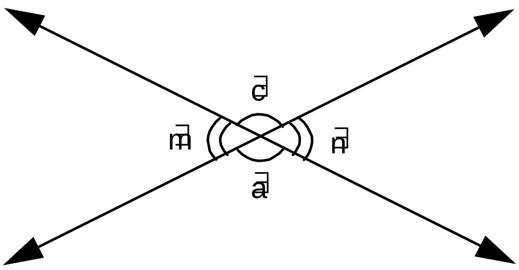
9) A soma do complemento com o suplemento de um ângulo é 110º. Quanto mede o ângulo ?

Ângulos opostos pelo vértice

Duas retas concorrentes determinam quatro ângulos, dois a dois, opostos pelo vértice.

Na figura:

- $\hat{a}$ e $\hat{c}$ são opostos pelo vértice.
- $\hat{m}$ e $\hat{n}$ são opostos pelo vértice.



Teorema

Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Prova:

Sejam os ângulos **a** e **b** opostos pelo vértice.

(1) $m(\hat{a}) + m(\hat{c}) = 180^\circ$

(2) $m(\hat{b}) + m(\hat{c}) = 180^\circ$

Comparando (1) e (2) :

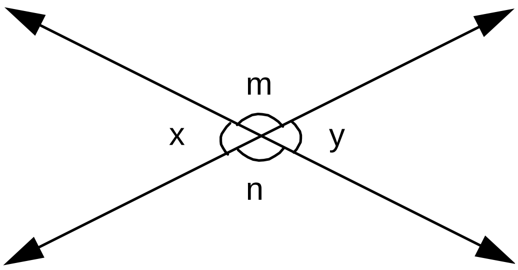
$m(\hat{a}) + m(\hat{c}) = m(\hat{b}) + m(\hat{c})$

$$\boxed{m(\hat{a}) = m(\hat{b})}$$

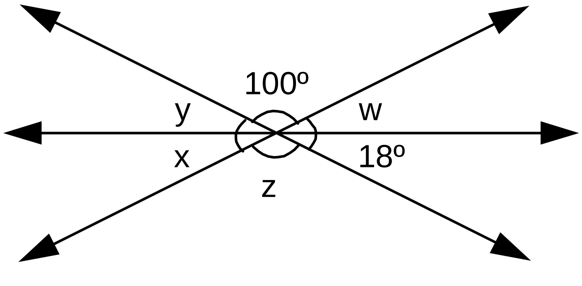
Se $\hat{a}$ e $\hat{b}$ têm a mesma medida, eles são congruentes.

Exercícios:

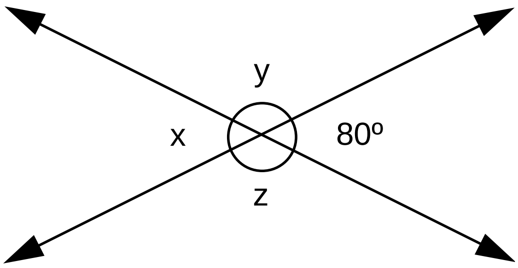
1) Se x = 50º, determine y, m e n:

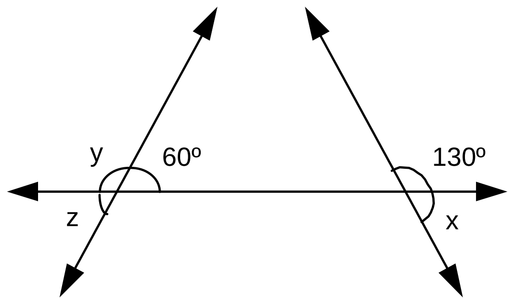


2) Calcule os ângulos x, y, z e w da figura:

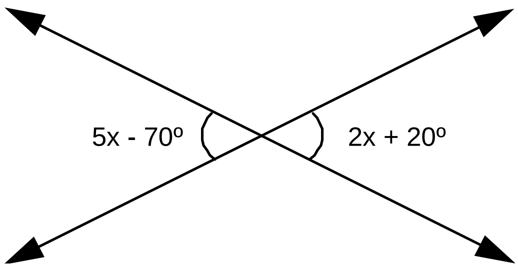


3) Calcule os ângulos x, y e z das figuras:





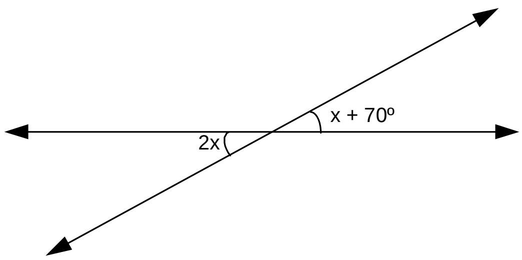
4) Observe o exemplo abaixo e determine o valor de **x** nas seguintes questões:



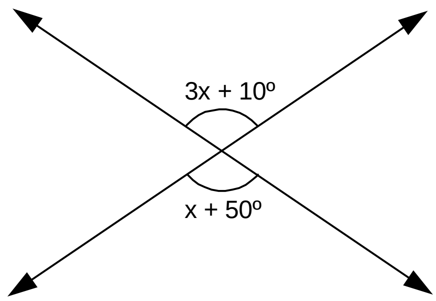
Solução:

$$5x - 70^{\circ} = 2x + 20^{\circ}$$
$$5x - 2x = 20^{\circ} + 70^{\circ}$$
$$3x = 90^{\circ}$$
$$x = 30^{\circ}$$

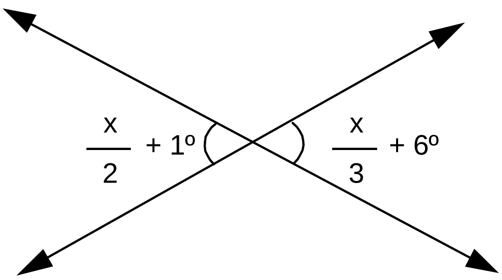
a)



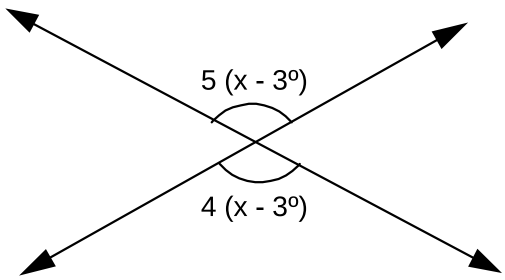
b)



c)

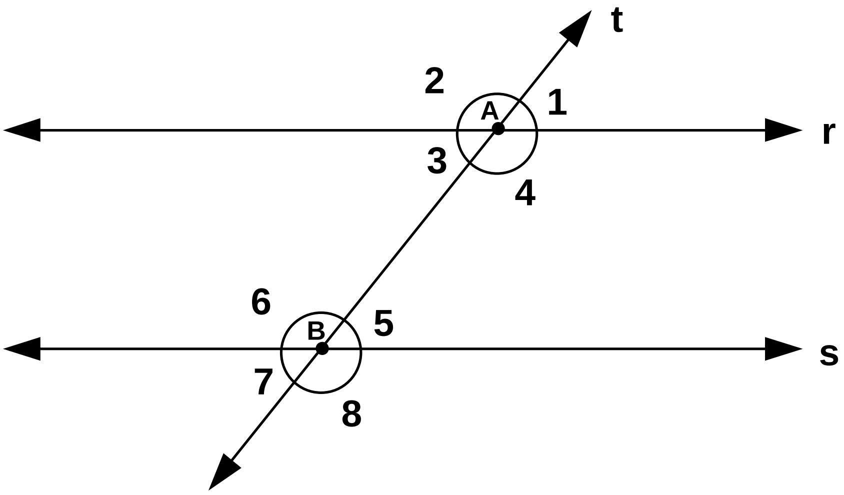


d)



Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal

Duas retas **r** e **s**, interceptadas pela transversal **t**, formam oito ângulos.

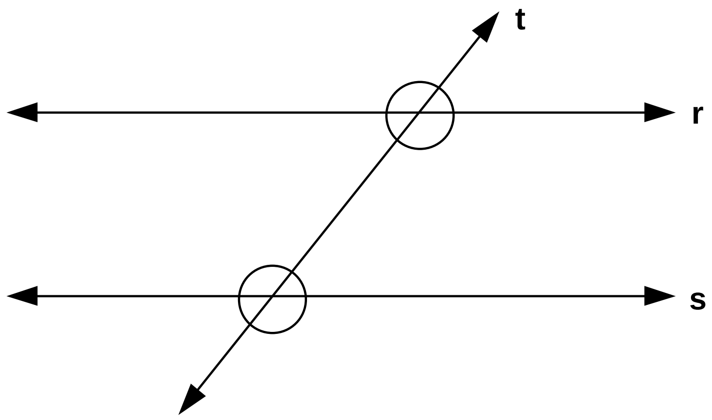


Os pares de ângulos com um vértice em A e o outro em B são assim denominados:

- ***Correspondentes:*** $\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{7}$
- ***Colaterais internos:*** $\hat{4}$ e $\hat{5}$, $\hat{3}$ e $\hat{6}$
- ***Colaterais externos:*** $\hat{1}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{7}$
- ***Alternos internos:*** $\hat{4}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{5}$
- ***Alternos externos:*** $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{2}$ e $\hat{8}$

Propriedades

Considere duas retas paralelas e uma transversal.

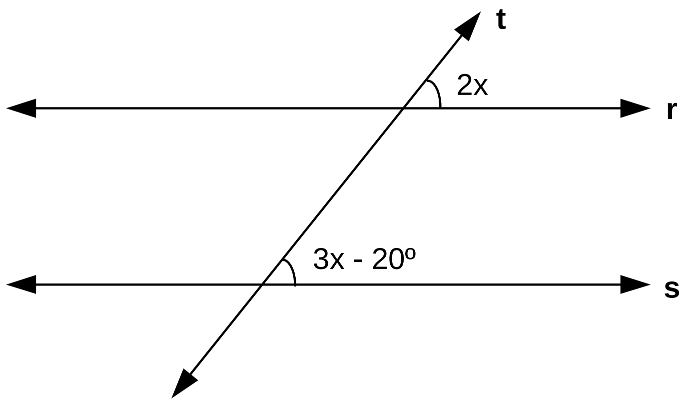


Medindo esses ângulos com o transferidor, você vai concluir que são válidas as seguintes propriedades:

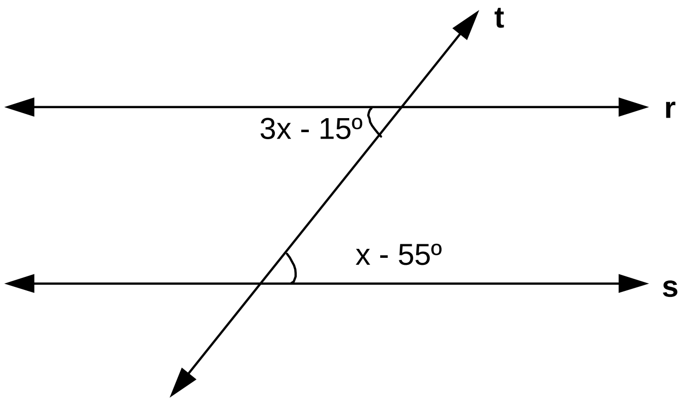
- Os ângulos correspondentes são congruentes.
- Os ângulos alternos externos são congruentes.
- Os ângulos alternos internos são congruentes.
- Os ângulos colaterais externos são suplementares.
- Os ângulos colaterais internos são suplementares.

Exercícios

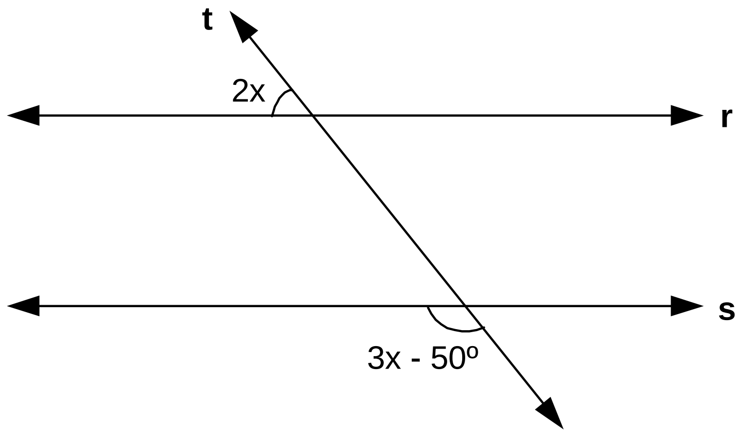
a)



b)



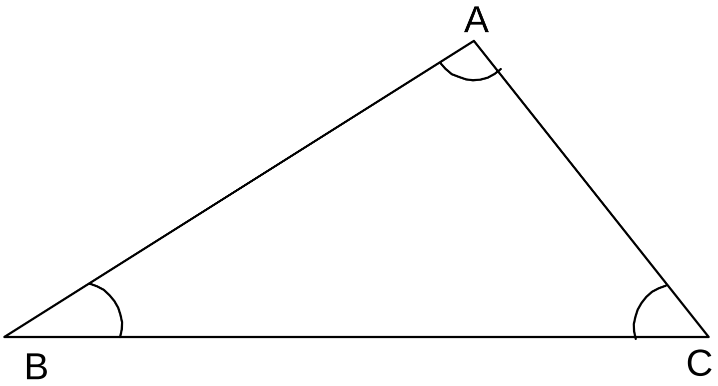
c)



Triângulos

Conceito

Triângulo é um polígono de três lados.



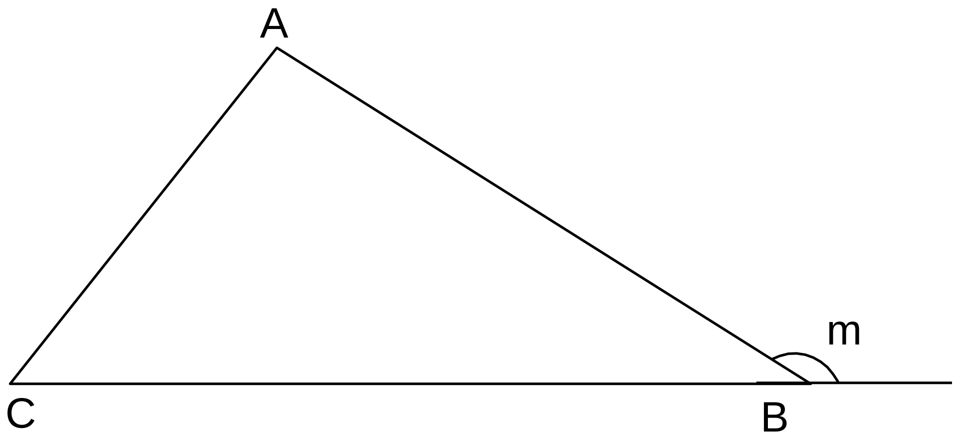
Na figura acima:

- Os pontos A, B e C são os ***vértices*** do triângulo.
- Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ são os ***lados*** do triângulo.
- Os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ***ângulos internos*** do triângulos.

Indicamos um triângulo de vértices A, B e C por Δ ABC.

Ângulo Externo

Ângulo externo é o ângulo suplementar do ângulo interno.



Na figura acima $\hat{m}$ é um ângulo externo.

Perímetro

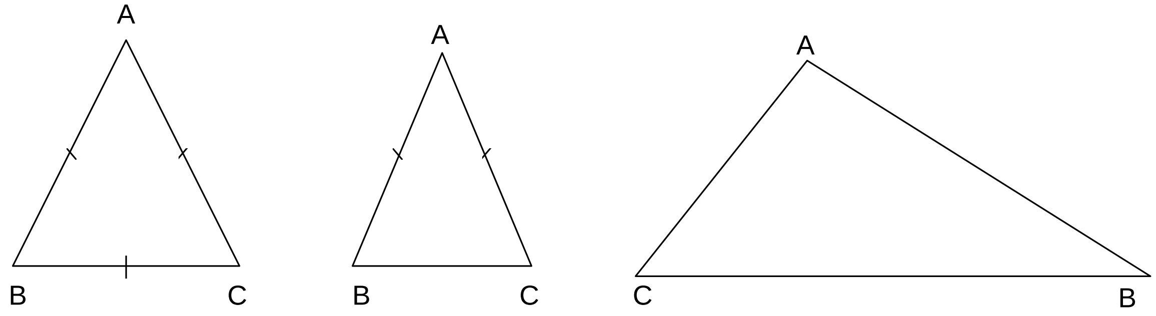
O perímetro de um triângulo é igual à soma das medidas dos seus lados.

Perímetro Δ ABC = $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$

Classificação dos Triângulos

Quanto aos lados os triângulos se classificam em:

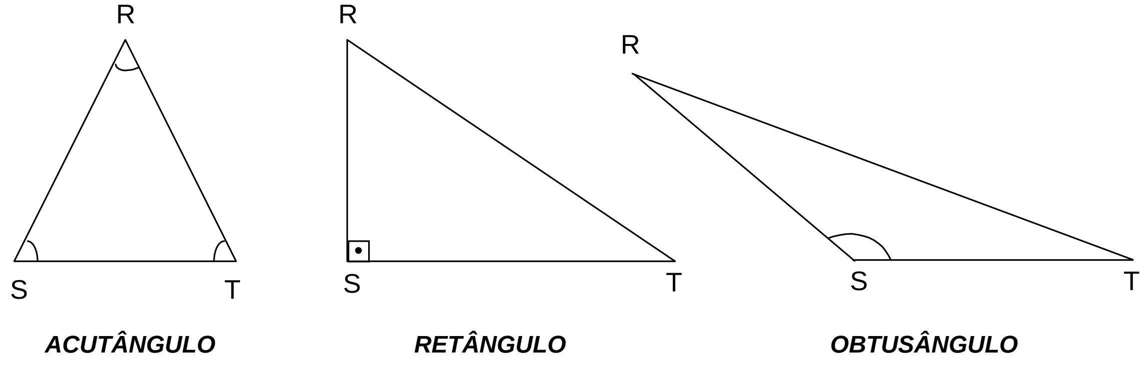
- ***Equilátero*** quando tem os três lados congruentes.
- ***Isósceles*** quando tem dois lados congruentes.
- ***Escaleno*** quando não tem lados congruentes.



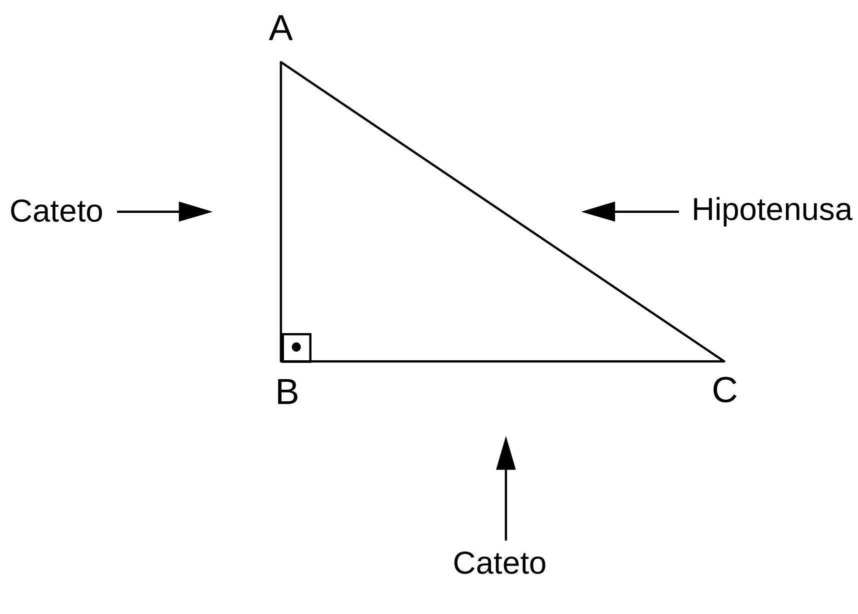
EQUILÁTERO ***ISÓSCELES*** ***ESCALENO***

Quanto aos ângulos os triângulos se classificam em:

- ***Acutângulo*** quando tem três ângulos agudos
- ***Retângulo*** quando tem um ângulo reto.
- ***Obtusângulo*** quando tem um ângulo obtuso.

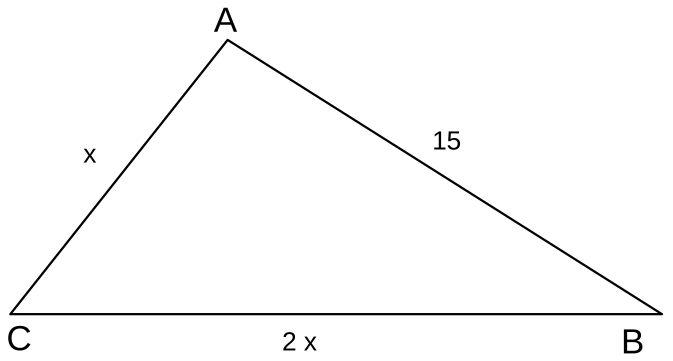


Em um triângulo retângulo os lados que formam o ângulo reto chamam-se ***catetos*** e o lado oposto ao ângulo reto chama-se ***hipotenusa***.

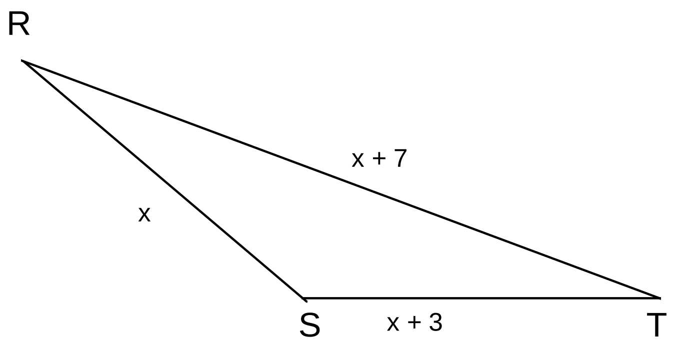


Exercícios:

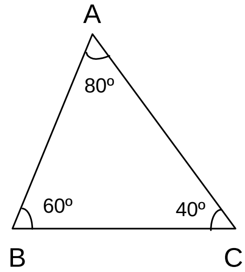
1) Determine o comprimento do lado $\overline{BC}$, sabendo-se que o perímetro do Δ ABC é 48cm.

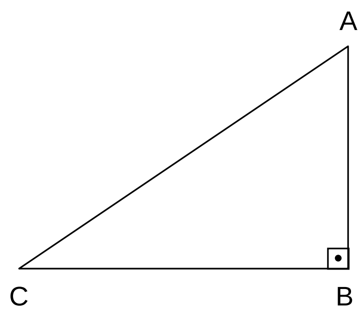


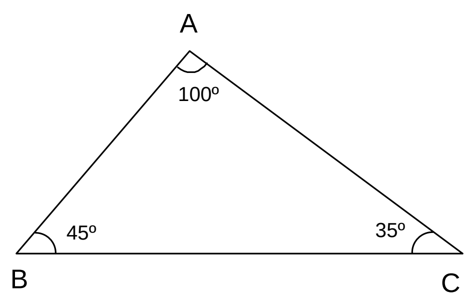
2) O perímetro do triângulo é 34 cm. Determine o comprimento do menor lado.



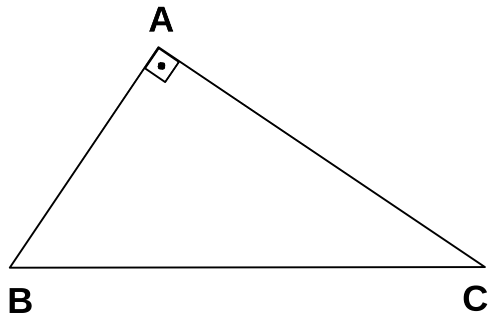
3) Classifique o triângulo de acordo com as medidas dos ângulos:







4) Observe a figura e responda:



a) Que nome recebe o lado $\overline{BC}$?

b) Que nome recebem os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$?

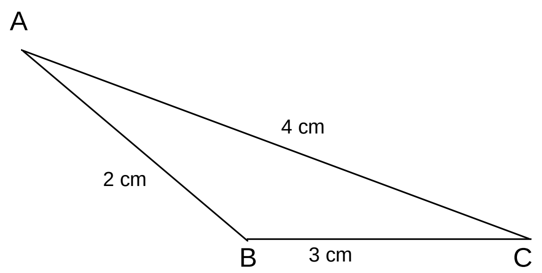
5) Que nome recebe o maior lado de um triângulo retângulo ?

Condição de existência de um Triângulo

Em qualquer triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois lados.

Exemplo:

Seja o triângulo:



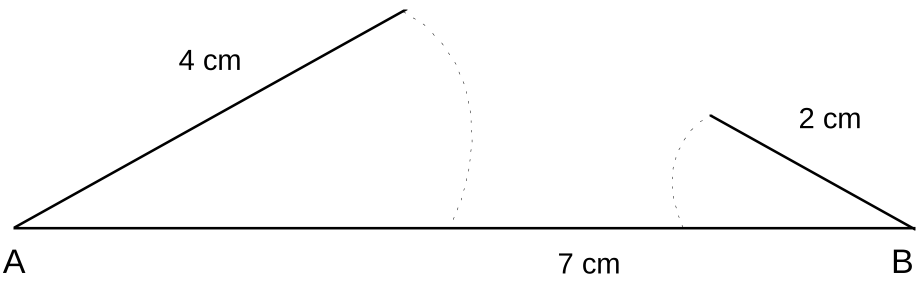
Vamos comparar a medida de cada lado com a soma das medidas dos outros dois.

Assim: $2 < 3 + 4$ ou $2 < 7$

$2 < 3 + 4$ ou $2 < 7$

$2 < 3 + 4$ ou $2 < 7$

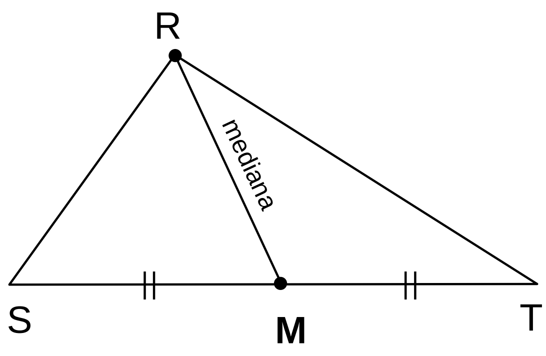
Para verificar a citada propriedade, procure construir um triângulo com as seguintes medidas: 7 cm, 4 cm e 2 cm.

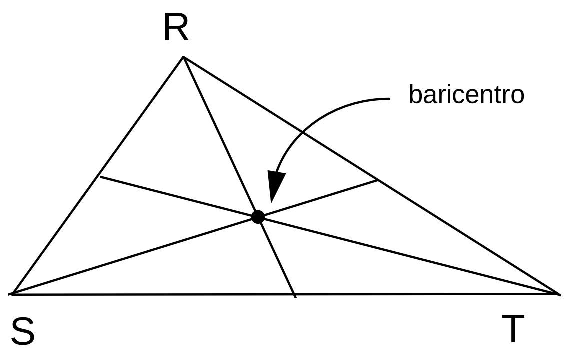


É impossível, não ? Logo ***não existe*** o triângulo cujos lados medem 7cm, 4cm e 2cm.

Elementos notáveis de um triângulo

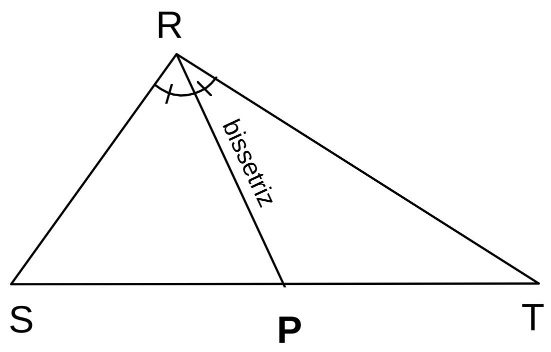
- ***Mediana*** de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

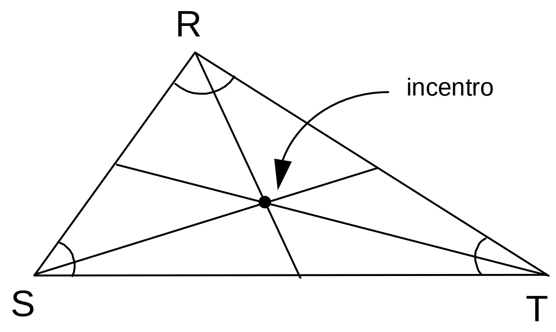




Todo triângulo tem três medianas que se encontram em um ponto chamado ***baricentro***.

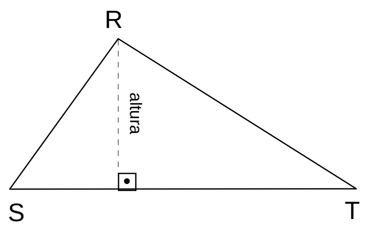
- ***Bissetriz*** de um triângulo é o segmento da bissetriz de um ângulo interno que tem por extremidades o vértice desse ângulo e o ponto de encontro com o lado oposto.

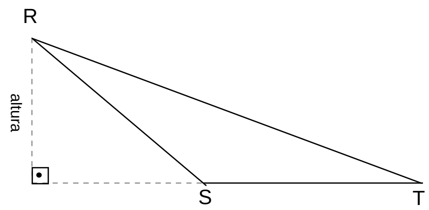


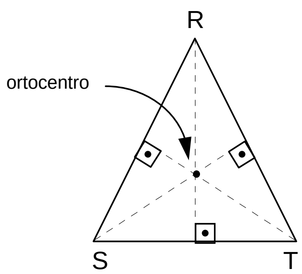


Todo triângulo tem três bissetrizes que se encontram em um ponto interior chamado ***incentro***.

- ***Altura*** de um triângulo é o segmento da perpendicular traçada de um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.



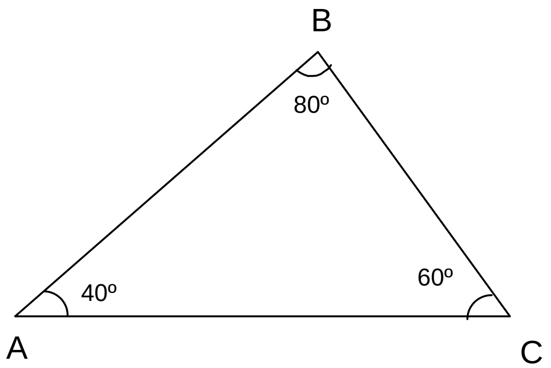


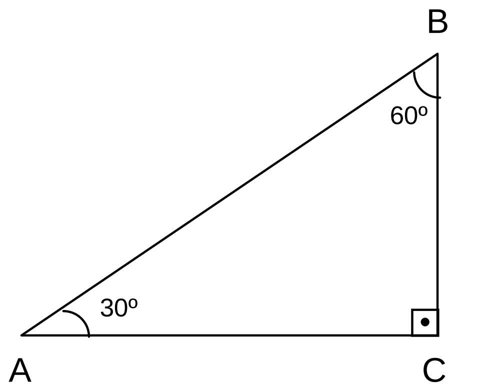


Todo triângulo tem três alturas que se encontram em um ponto chamado ***ortocentro***.

Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Observe os triângulos e as medidas dos ângulos internos.





80º + 40º + 60º = 180º

30º + 60º + 90º = 180º

Note que: $\boxed{m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^{o}}$

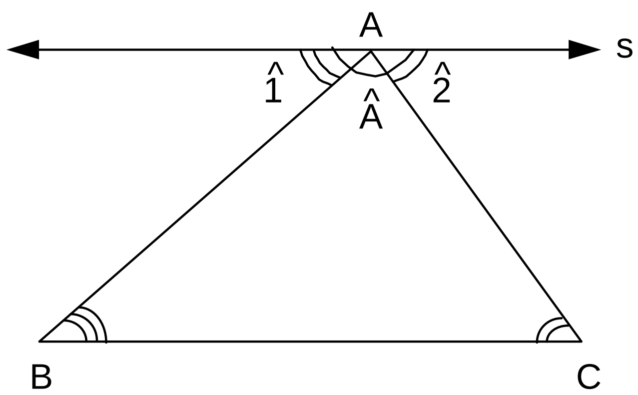
Vamos à demonstração desse teorema.

Teorema

> Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º.

Prova:

consideremos um triângulo ABC. Vamos provar que
$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^{o}$



a) Pelo vértice A, traçamos a reta **s** paralela ao lado $\overline{BC}$.

$m(\hat{1}) + m(\hat{A}) + m(\hat{2}) = 180^\circ$ ***1***

Note que: $m(\hat{1}) \cong m(\hat{B})$ (alternos internos) ***2***

$m(\hat{2}) \cong m(\hat{C})$ (alternos internos) ***3***

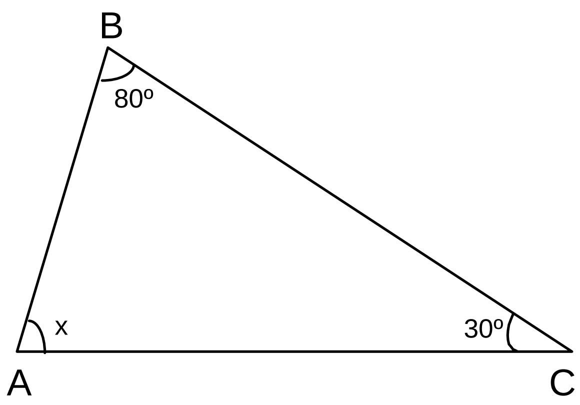
b) Temos que:

c) Substituindo ***2*** e ***3*** em ***1***, temos:

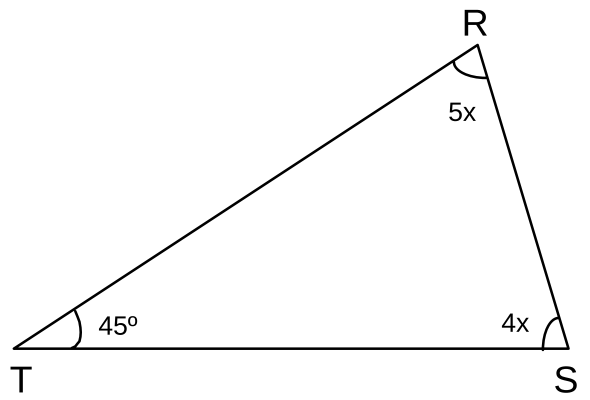
$$\boxed{m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ}$$

Exercícios:

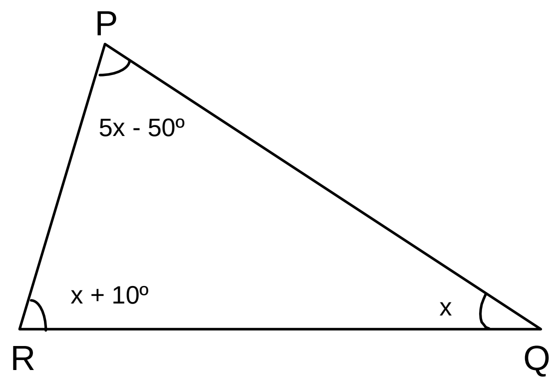
1) Calcular **x** no triângulo abaixo:



2) Calcular **x** no triângulo abaixo:

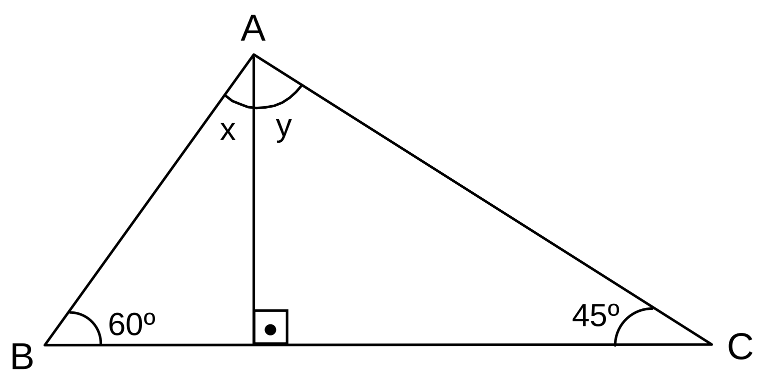


3) Calcular **x** no triângulo abaixo:

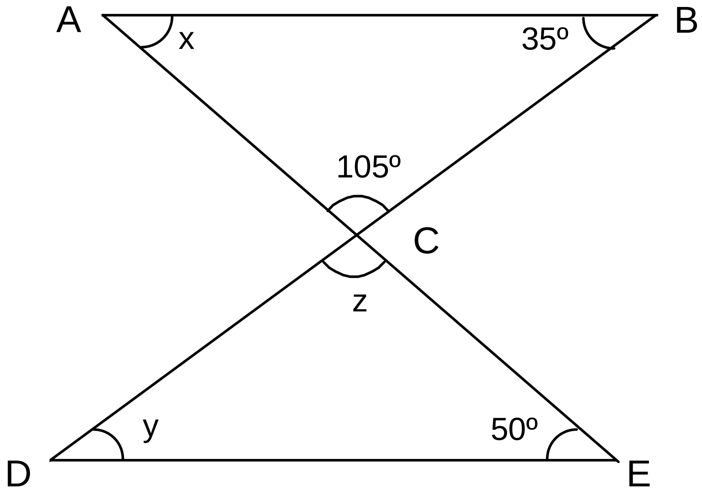


4) Determine a medida dos ângulos **x**, **y** e **z**.

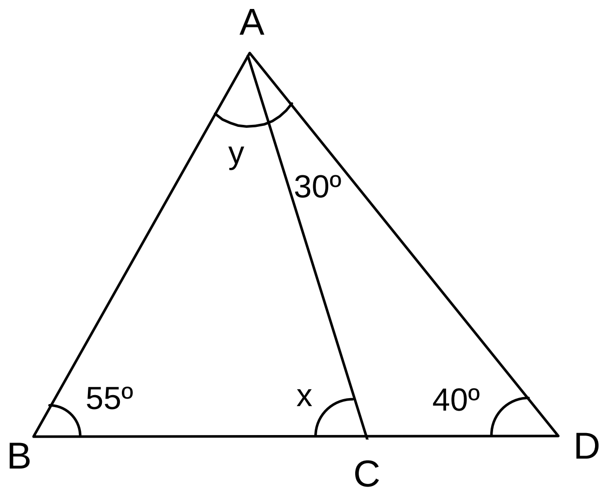
a)



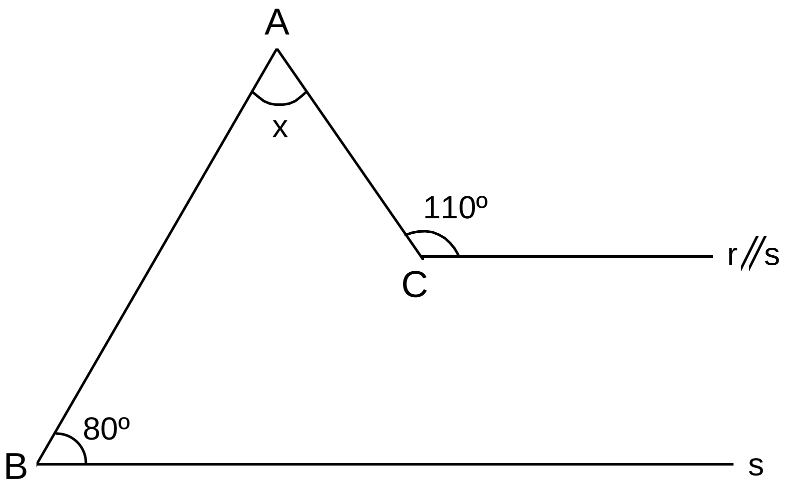
b)



c)



d)

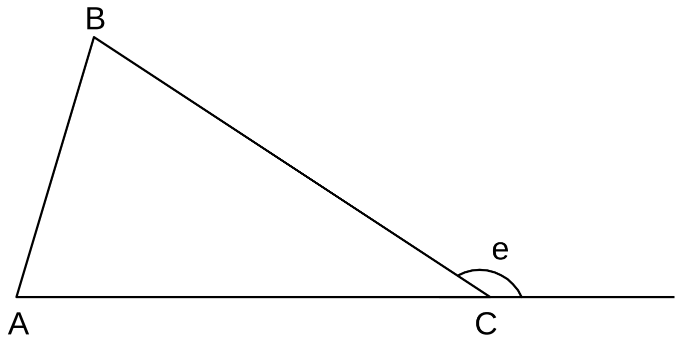

A
x
110º
r//s
C
80º
B
s

Teorema do ângulo externo

Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.

Prova:

Consideremos um triângulo ABC. Vamos provar que
$m(\hat{e}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$



a) $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ (pelo teorema anterior)

$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180^\circ - m(\hat{C})$ ***1***

b) $m(\hat{e}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$

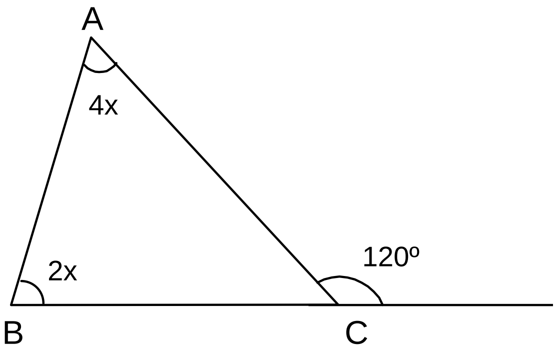
$m(\hat{e}) = 180^\circ - m(\hat{C})$ ***2***

Igualando ***1*** e ***2*** temos:

$$\boxed{m(\hat{e}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})}$$

Exemplo:

Calcule o valor de **x** no triângulo abaixo:



Solução

Pelo teorema do ângulo externo, temos:

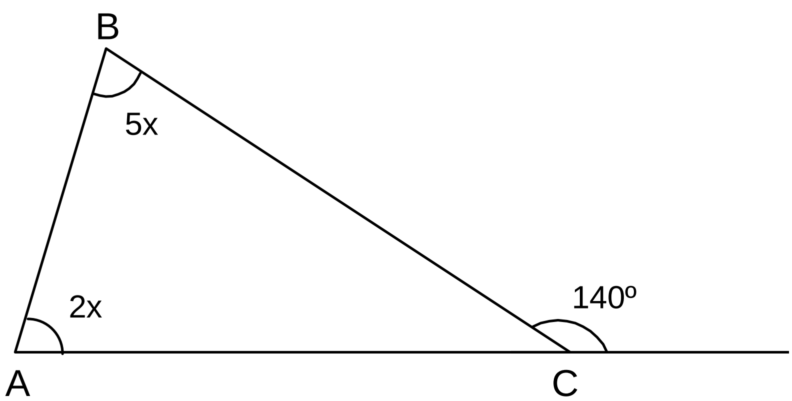
$$4x + 2x = 120^{o}$$
$$6x = 120^{o}$$
$$x = 20^{o}$$

Resposta: $x = 20^{o}$

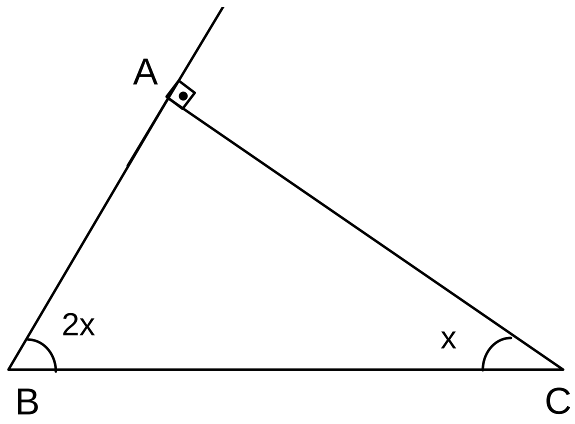
Exercícios:

1) Calcule o valor de **x** nos triângulos dados:

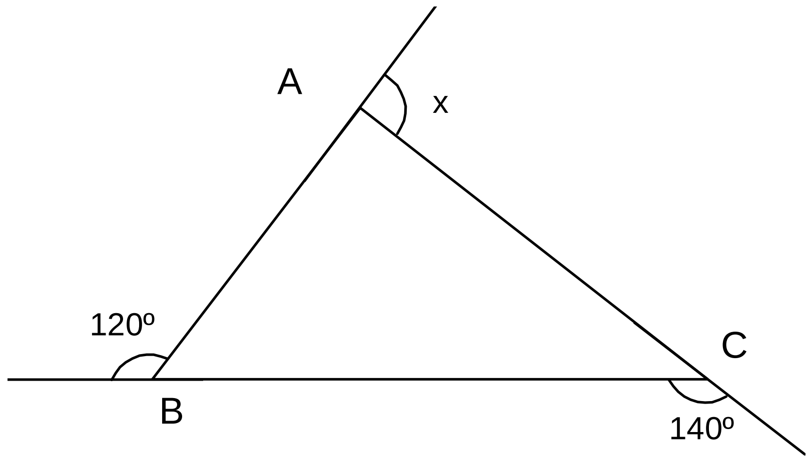
a)



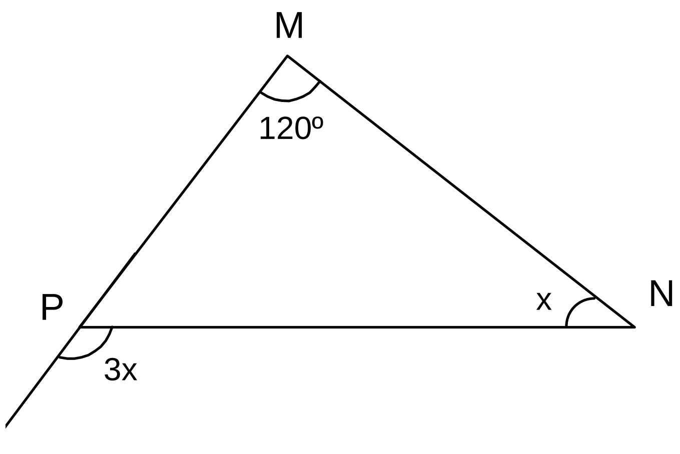
b)



c)

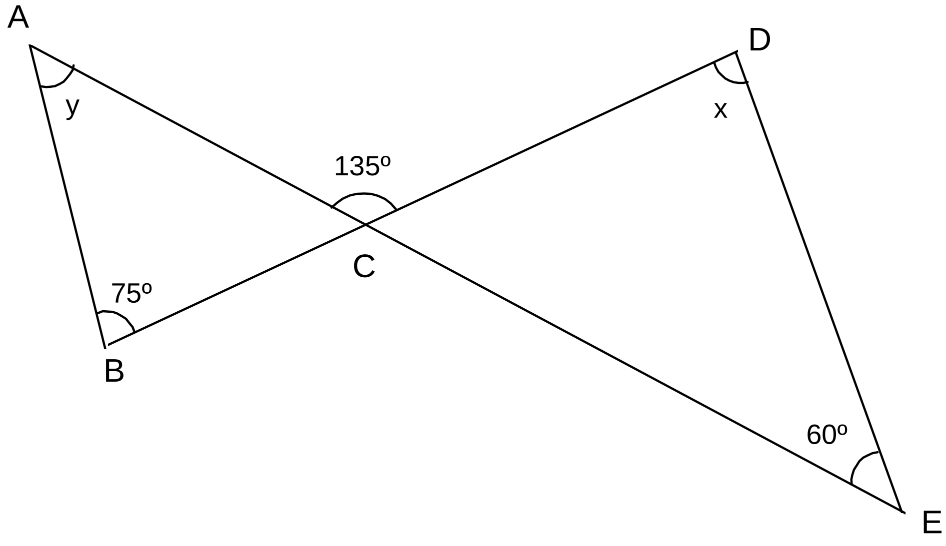


d)



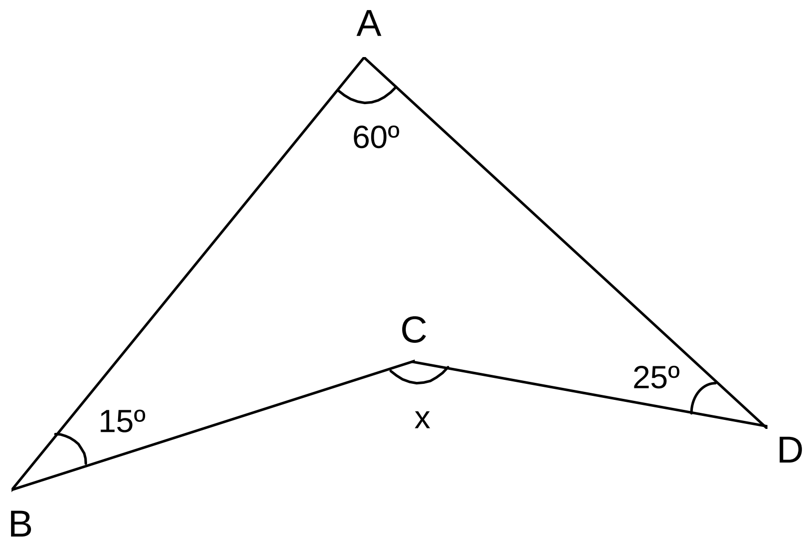
2) Calcule **x** e **y**:

a)

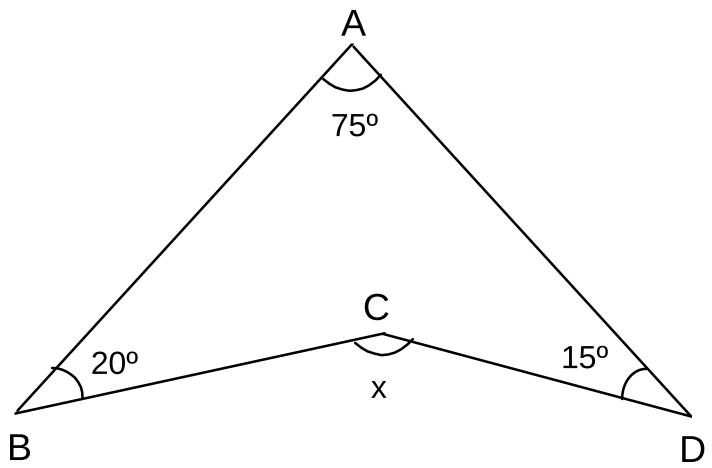


3) Calcule **x**:

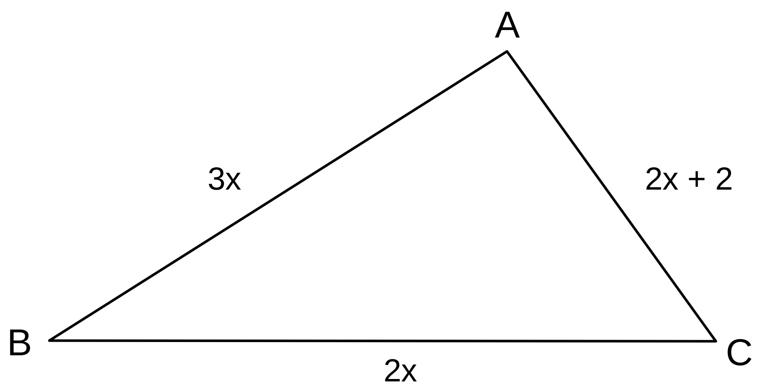
a)



b)



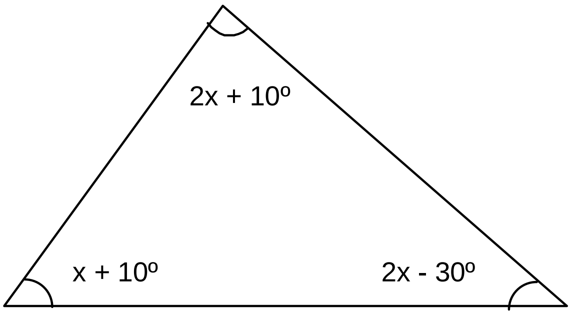
4) O perímetro do triângulo da figura é 37cm. Qual a medida do menor lado ?



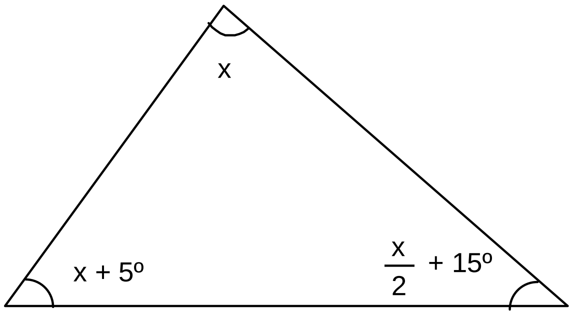
5) Com os segmentos de medidas 8cm, 7cm e 18cm podemos construir um triângulo ? Por quê ?

6) Calcule **x**:

a)

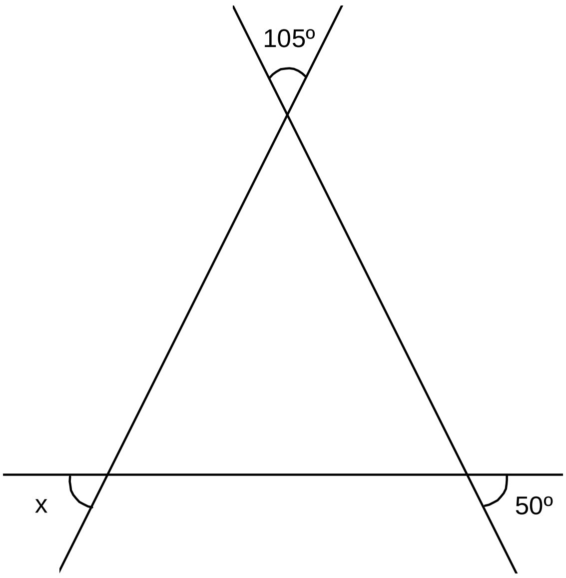


b)

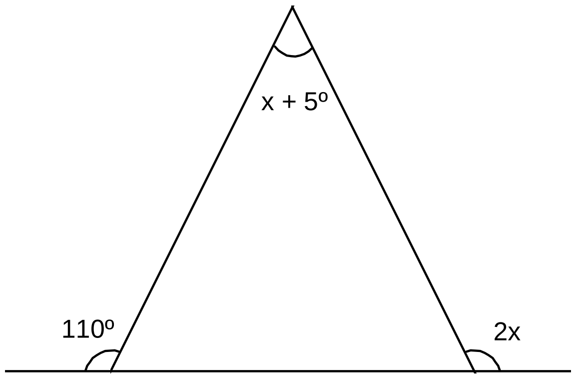


6) Calcule **x**:

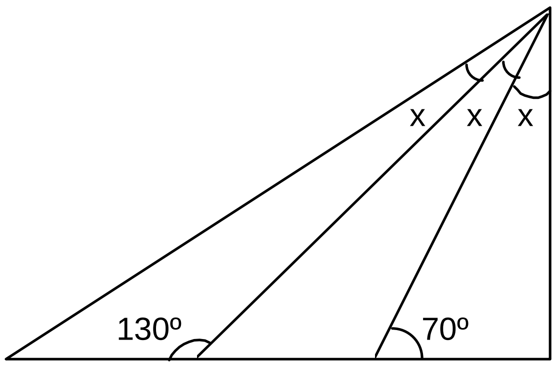
a)



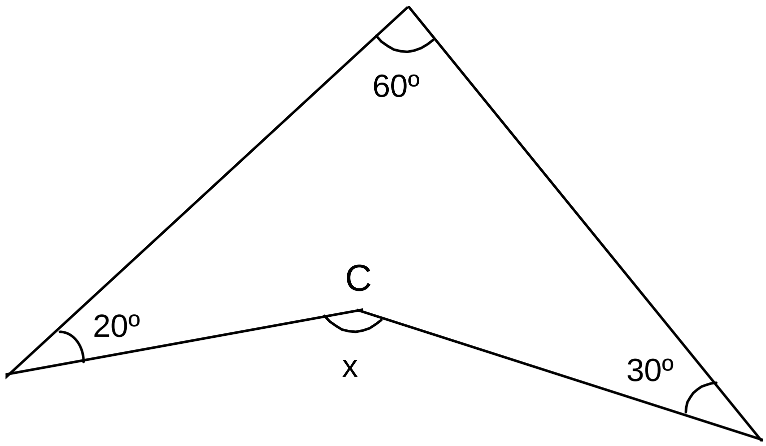
b)



a)

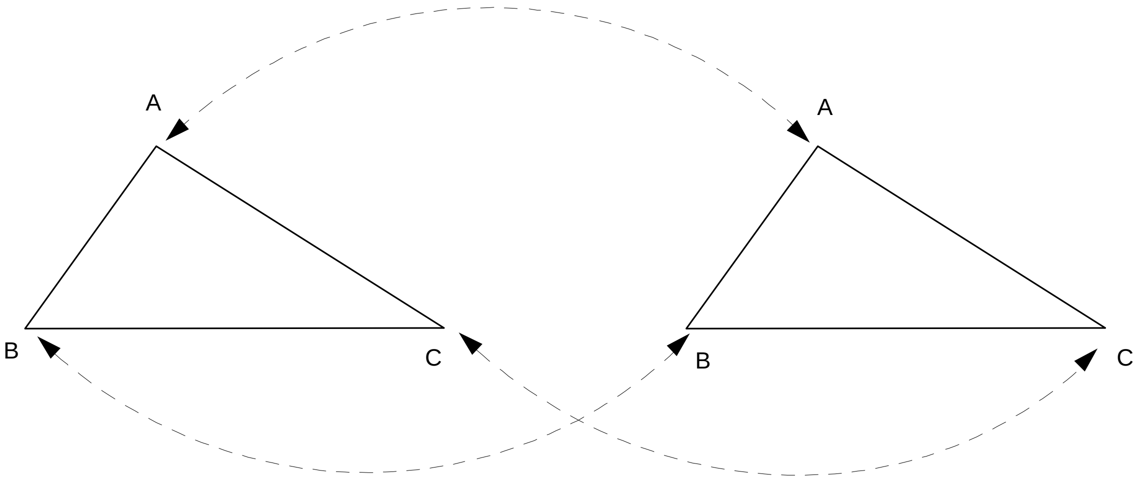


b)



Congruência de triângulos

Intuitivamente, dois triângulos ABC e RST são congruentes se for possível transportar um deles sobre o outro, de modo que eles coincidam.



Definição

Dois triângulos são chamados ***congruentes*** quando os lados e os ângulos correspondentes são congruentes.

Logo:

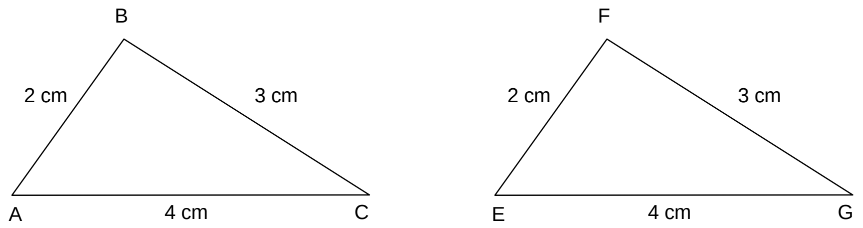
$$\Delta ABC \cong \Delta RST \iff \begin{array}{lcl} \overline{AB} \cong \overline{RS} & & \hat{A} \cong \hat{R} \\ \overline{BC} \cong \overline{ST} & \text{e} & \hat{B} \cong \hat{S} \\ \overline{CA} \cong \overline{TR} & & \hat{C} \cong \hat{T} \end{array}$$

Casos de congruência

O estudo dos casos de congruência de dois triângulos tem por finalidade estabelecer o menor número de condições para que dois triângulos sejam congruentes.

1º CASO: **L . L . L . (lado, lado, lado)**

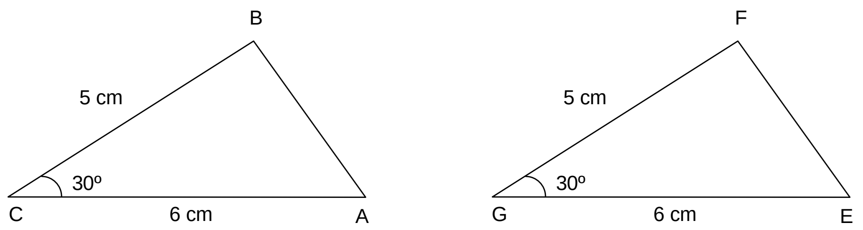
Dois triângulos que têm três lados respectivamente congruentes são congruentes.



$$\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{EF} \\ \overline{AC} \cong \overline{EG} \\ \overline{BC} \cong \overline{FG} \end{array} \Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta EFG$$

2º CASO: **L . A . L . (lado, ângulo, lado)**

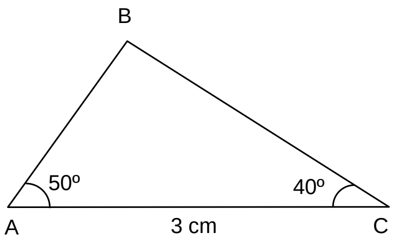
Dois triângulos que têm dois lados e o ângulo por eles formado respectivamente congruentes são congruentes.

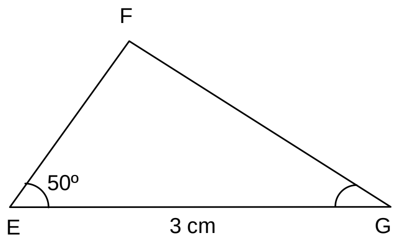


$$\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{EF} \\ \hat{A} \cong \hat{E} \\ \overline{AC} \cong \overline{EG} \end{array} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta EFG$$

3º CASO: A . L . A . (ângulo, lado, ângulo)

Dois triângulos que têm um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado respectivamente congruentes são congruentes.

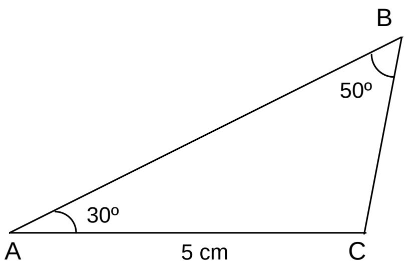


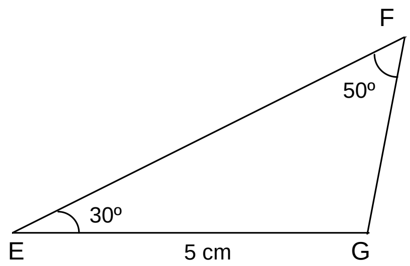


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \cong \hat{E} \\ \overline{AC} \cong \overline{EG} \\ \hat{C} \cong \hat{G}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta EFG$$

4º CASO: L . A . A_o . (lado, ângulo, ângulo oposto)

Dois triângulos que têm um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes são congruentes.



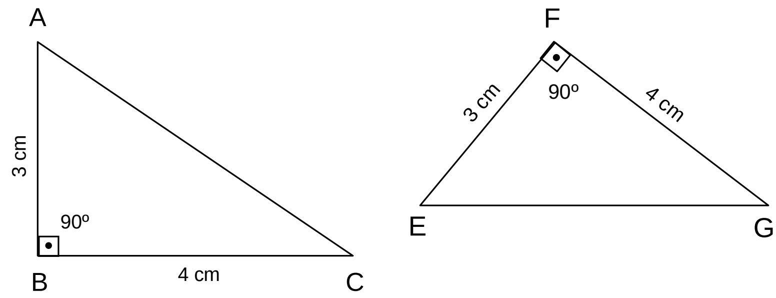


$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC} \cong \overline{EG} \\ \hat{A} \cong \hat{E} \\ \hat{B} \cong \hat{F}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta EFG$$

Exercícios

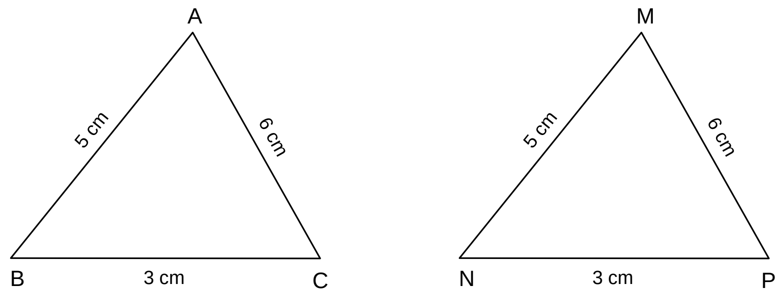
1) Cite, em cada item, o caso de congruência dos triângulos.

a)



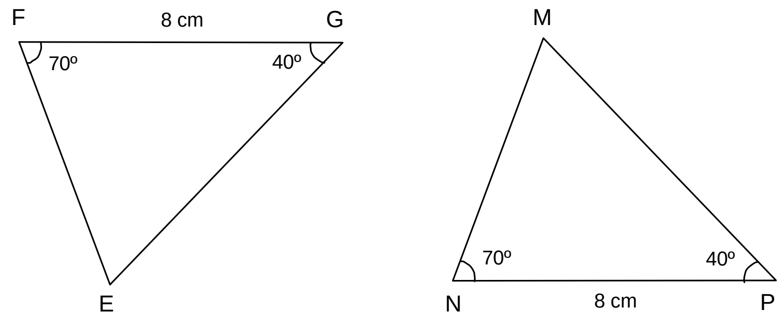
Δ ABC $\cong$ Δ EFG

b)



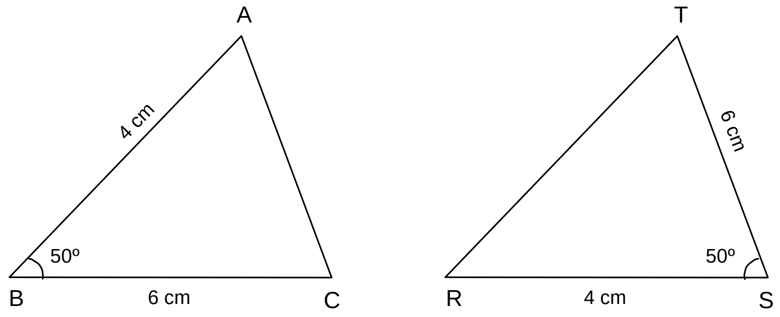
Δ ABC $\cong$ Δ MNP

c)



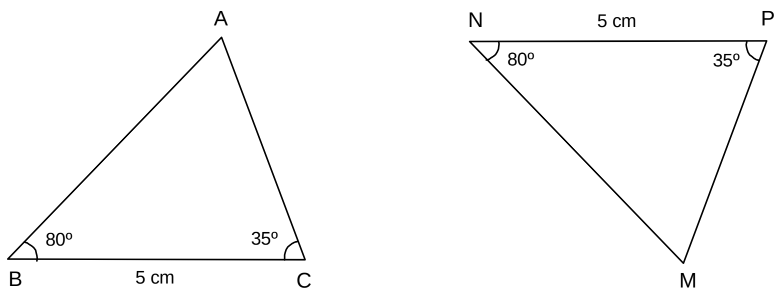
Δ ABC $\cong$ Δ MNP

d)



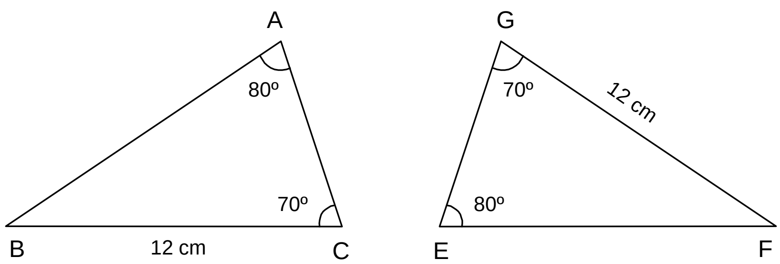
Δ ABC $\cong$ Δ RST

e)



Δ ABC $\cong$ Δ MNP

f)



Δ ABC $\cong$ Δ EFG

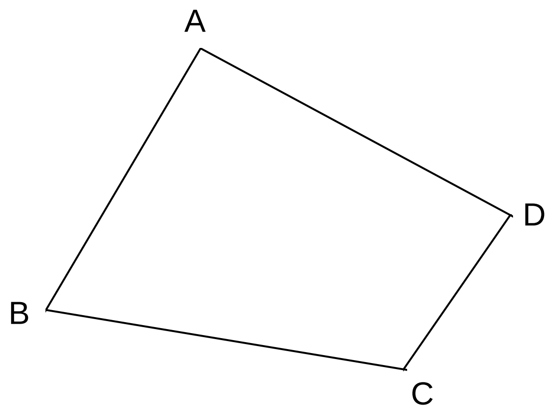
Quadrilátero

Conceito

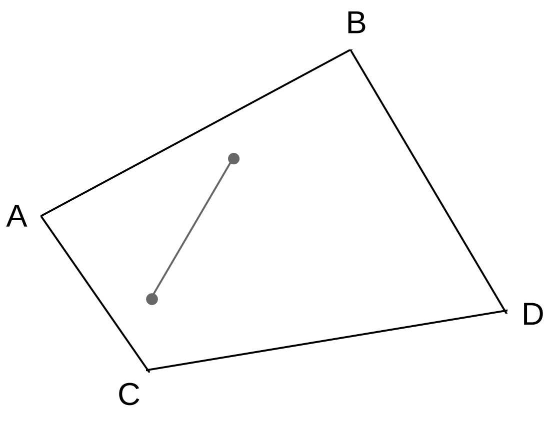
Quadrilátero é um polígono de quatro lados.

No quadrilátero ao lado, destacamos:

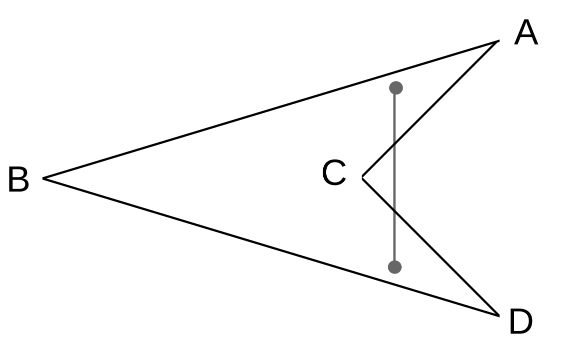
- ***vértice***: A, B, C, D
- ***lados***: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$
- ***ângulos internos***: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$
- ***lados opostos***: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$
- ***ângulos opostos***: $\hat{A}$ e $\hat{C}$, $\hat{B}$ e $\hat{D}$



Lembre-se de que um quadrilátero é convexo quando qualquer segmento com extremidades no quadrilátero está contido nele.



Quadrilátero convexo



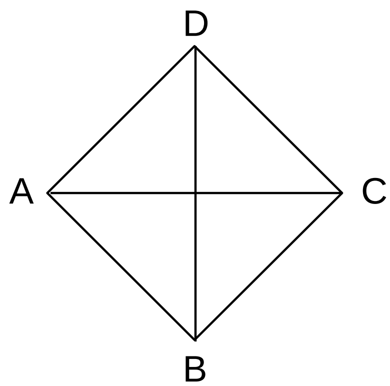
Quadrilátero não-convexo

Estudaremos apenas os quadriláteros convexos.

Diagonal

O segmento que une dois vértices não consecutivos é chamado ***diagonal***.

Na figura, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diagonais.



Exercícios

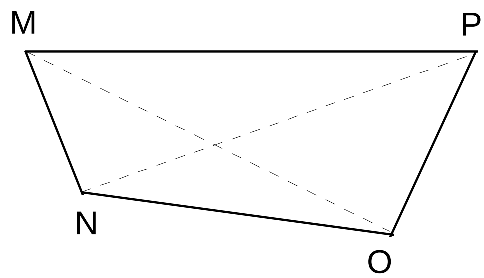
1) Observe o quadrilátero e responda:

a) Quais são os lados ?

b) Quais são os vértices ?

c) Quais são os ângulos internos ?

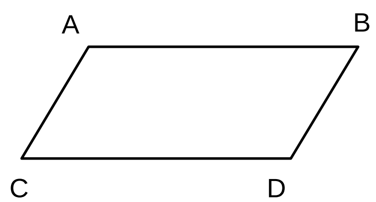
d) Quais são as diagonais indicadas ?



2) Considere o quadrilátero ABCD.

a) Nomeie os dois pares de lados opostos.

b) Nomeie os dois pares de ângulos opostos.

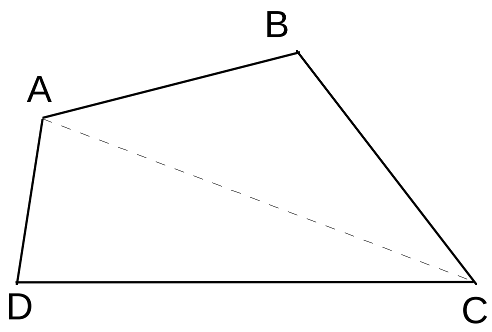


3) O perímetro de um quadrilátero mede 41cm. Quanto mede cada lado se as medidas são representadas por x, x + 2, 3x + 1 e 2x - 4 ?

Soma dos ângulos internos de um quadrilátero

ABCD é um quadrilátero convexo e a diagonal AC o divide em dois triângulos.

Veja:



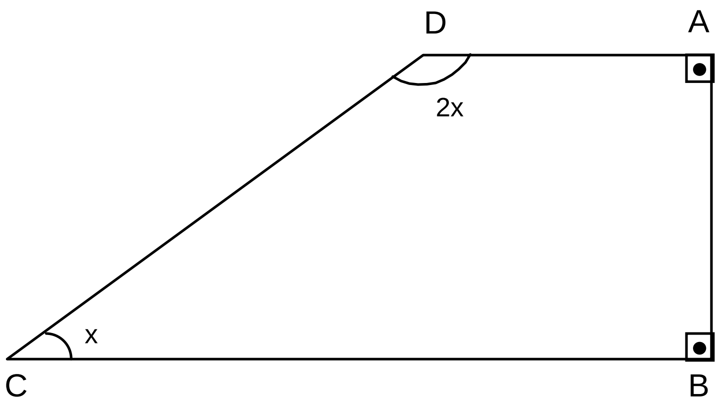
A soma dos ângulos internos dos dois triângulos é a soma dos ângulos internos do quadrilátero.

Logo:

A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 180º + 180º = 360º

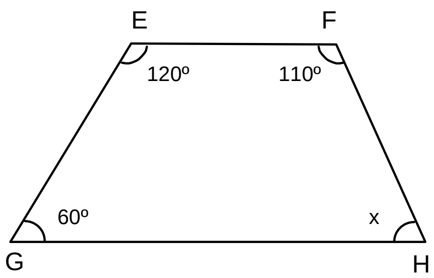
Exercícios:

1) Na figura abaixo, calcular o valor de **n**.

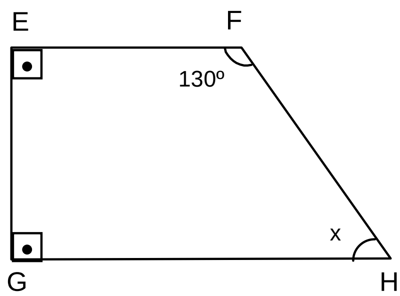


2) Na figura abaixo, calcular o valor de **n**.

a)

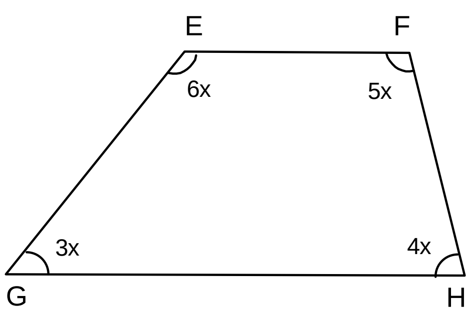


b)

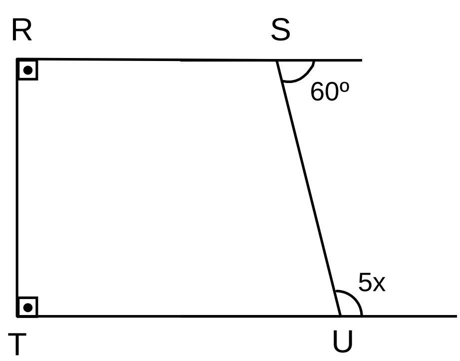


3) Calcule o valor de **x** nos seguintes quadriláteros:

a)

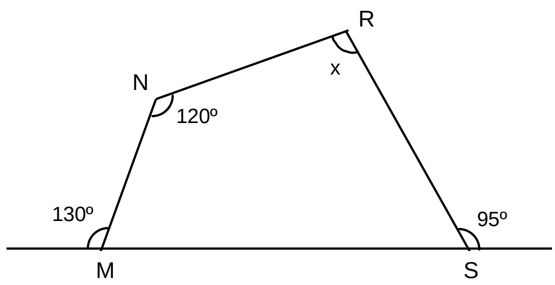


b)

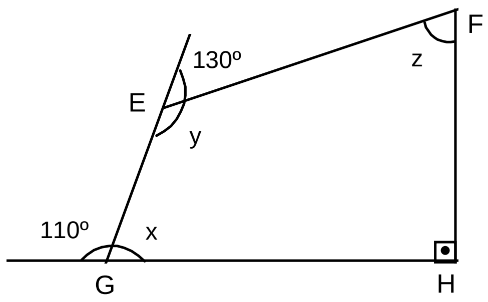


4) Calcule as medidas dos ângulos indicados com letras:

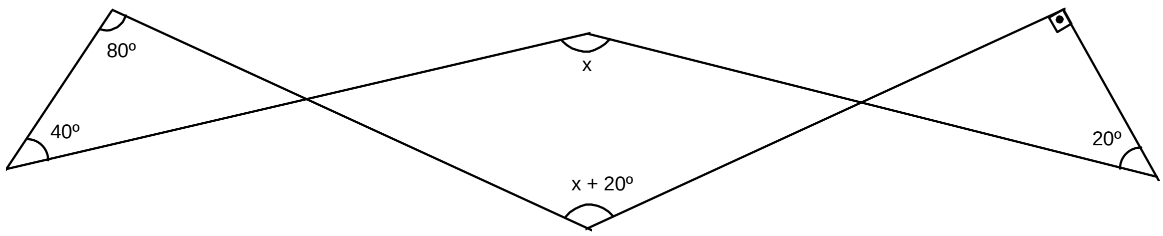
a)



b)



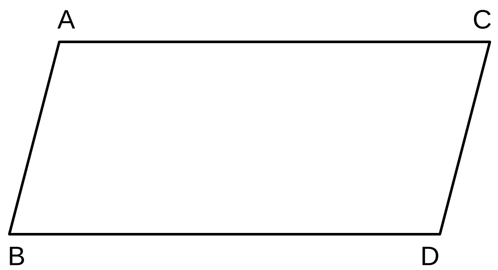
5) Calcule **x** na figura:



6) Calcule os ângulos internos de um quadrilátero sabendo que eles medem x, 2x, $\frac{x}{2}$ e $\frac{3x}{2}$.

Paralelogramos

Paralelogramo é o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.



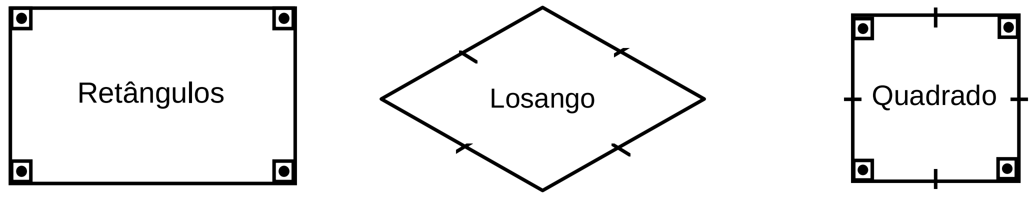
Na figura, temos:

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

Tipos de Paralelogramos

- **Retângulo** - Possui quatro ângulos retos.
- **Losango** - Possui os quatro lados congruentes.
- **Quadrado** - Possui os quatro lados congruentes e os ângulos retos.



Note que:

- Todo quadrado é um losango.
- Todo quadrado é um retângulo.

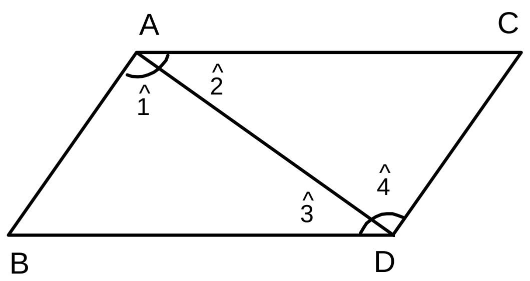
Teorema:

$\boxed{\text{Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.}}$

Prova:

Seja o paralelogramo ABCD. Vamos provar que

$\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$



a) Tracemos a diagonal $\overline{BD}$ e consideremos os triângulos ABD e CDB.

b) Temos:

- $\hat{1} \cong \hat{4}$ (alternos internos)
- $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (comum)
- $\hat{2} \cong \hat{3}$ (alternos internos)

$\xrightarrow{\text{A . L . A .}}$ Δ ABD $\cong$ Δ CDB

Então, os ângulos correspondentes são congruentes, ou seja: $\hat{A} \cong \hat{C}$.

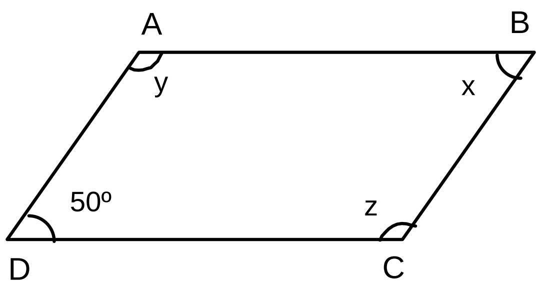
- $\hat{1} \cong \hat{4}$
- $\hat{2} \cong \hat{3}$

$\Rightarrow \quad \hat{1} + \hat{4} \cong \hat{2} + \hat{3}$

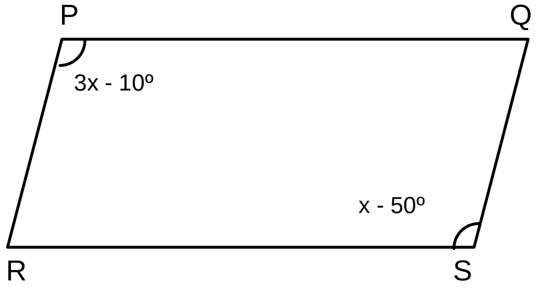
Logo: $\hat{B} \cong \hat{D}$

Exercícios:

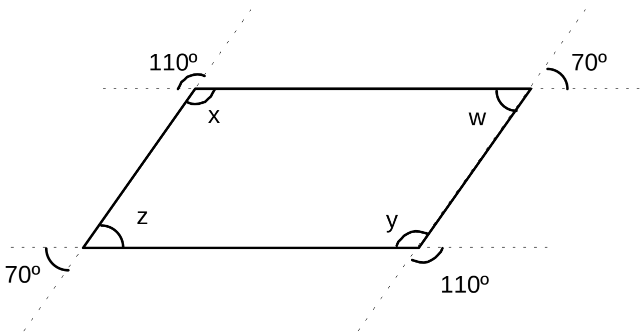
1) Determinar as medidas de **x**, **y** e **z** no paralelogramo abaixo:



2) Determinar as medidas de **x**, **y** e **z** no paralelogramo abaixo:



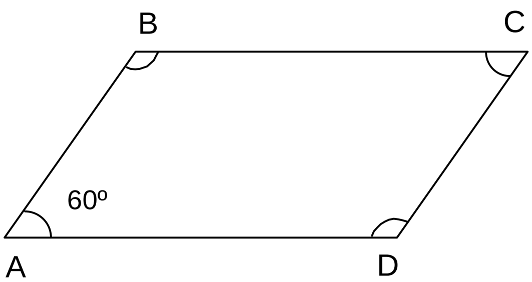
3) Observe a figura e calcule as medidas de **x**, **y**, **z** e **w**.



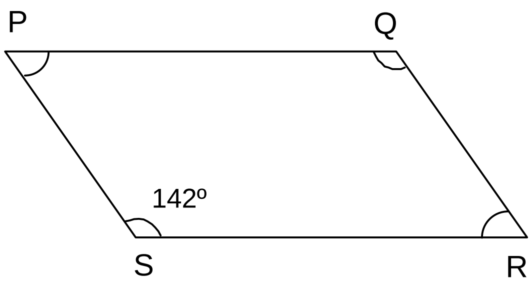
4) Baseado nos resultados do exercício anterior, responda:
Os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes?

5) Calcule os ângulos indicados nos paralelogramos seguintes:

a)

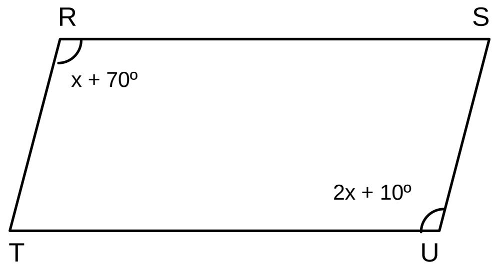


b)

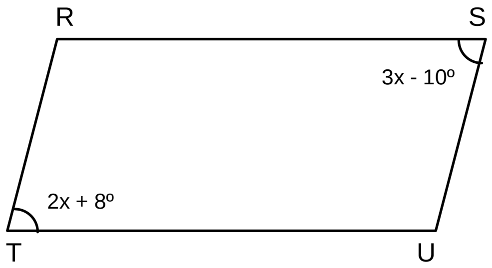


6) Calcule os valor de **x** nos paralelogramos abaixo:

a)

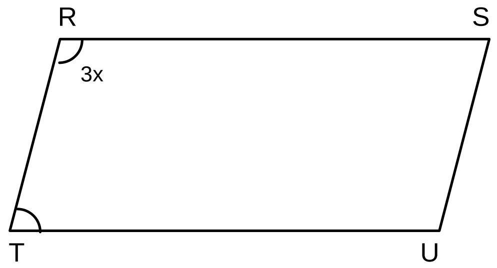


b)

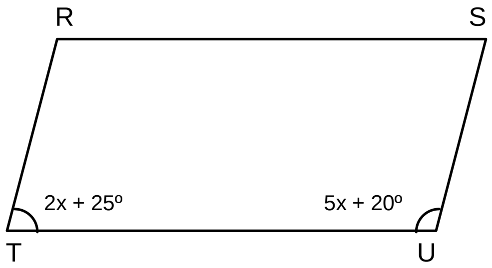


7) Calcule os valor de **x** nos paralelogramos abaixo:

a)

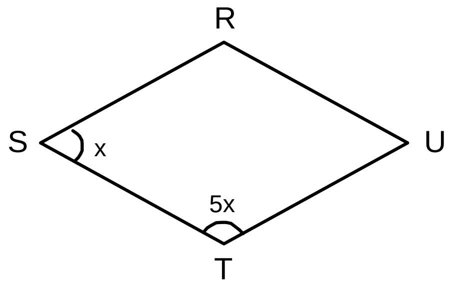


b)

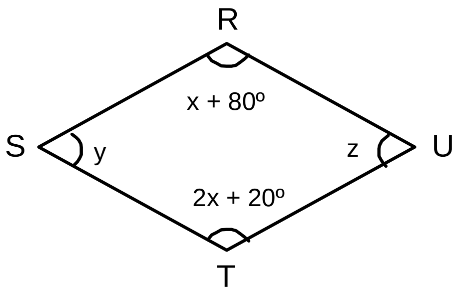


7) Calcule os valor de **x**, **y** e **z** nos losangos abaixo:

a)

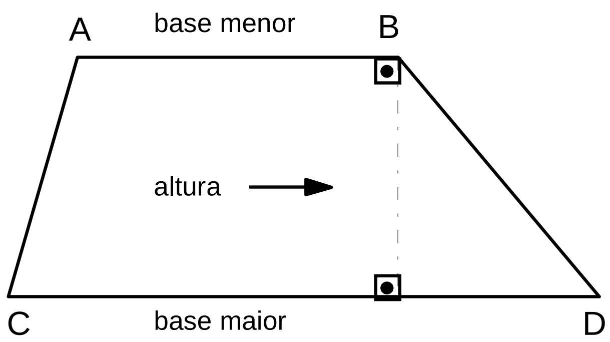


b)



Trapézio

Trapézio é o quadrilátero que possui dois lados paralelos (que são chamados de base).



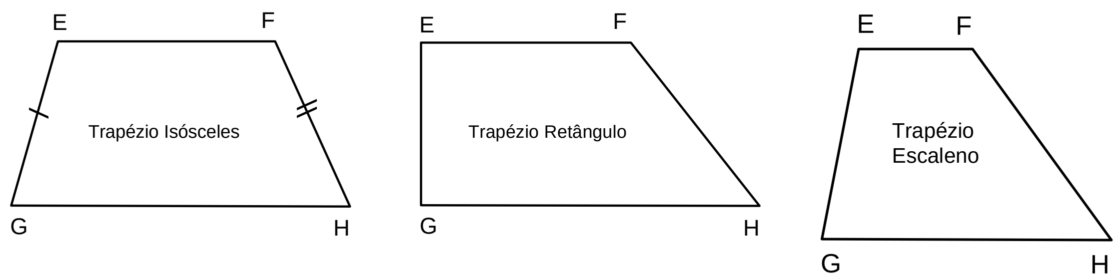
Na figura, temos:

$\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$

A distância entre as bases chama-se altura.

Tipos de Trapézio

- **Isósceles** - Os lados não-paralelos são congruentes.
- **Retângulo** - Tem dois ângulos retos.
- **Escaleno** - Os lados não-paralelos não são congruentes.

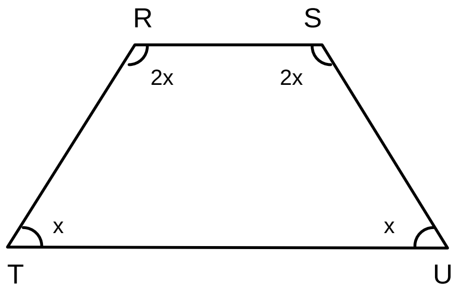


Exercícios:

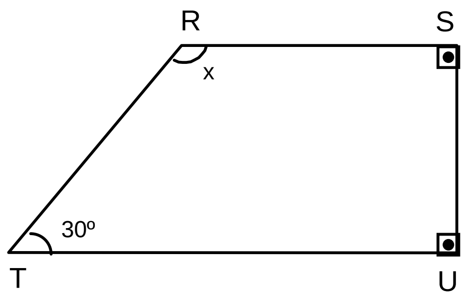
1) Num trapézio, como são chamados os lados paralelos ?

2) Calcule o valor de **x** nas figuras:

a)

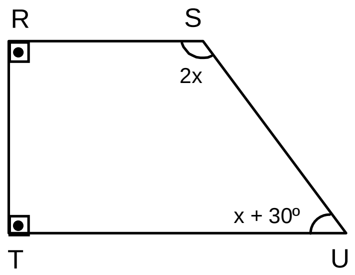


b)

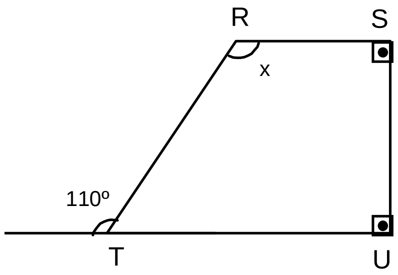


3) Calcule o valor de **x** nas figuras:

a)



b)



4) Responda:

a) Quantos lados possui um quadrilátero ?

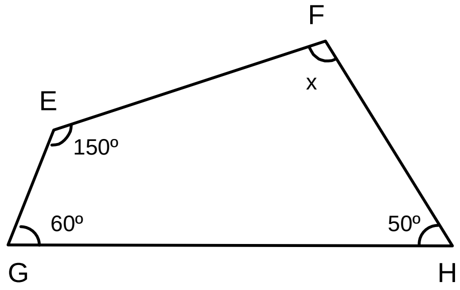
b) Quantos vértices possui um quadrilátero ?

c) Quantas diagonais possui um quadrilátero ?

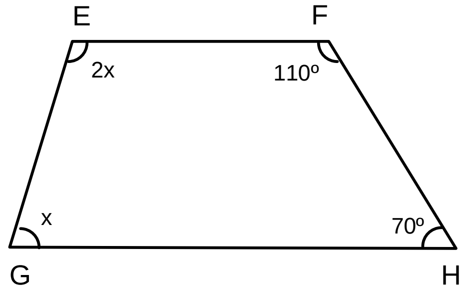
5) Quanto vale a soma dos ângulos internos de um quadrilátero?

6) Calcule o valor de **x** nos seguintes quadriláteros:

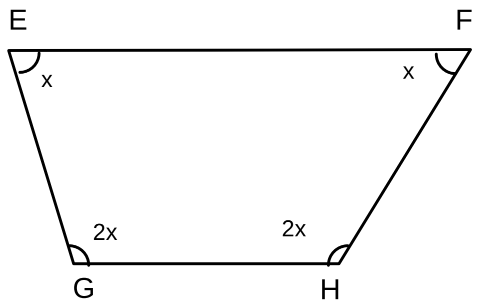
a)



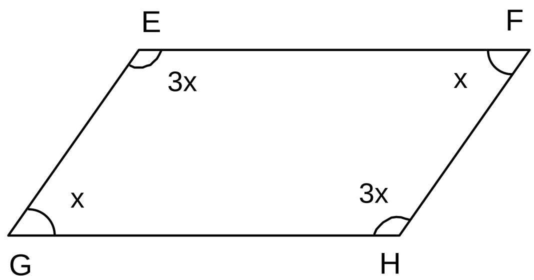
b)



c)

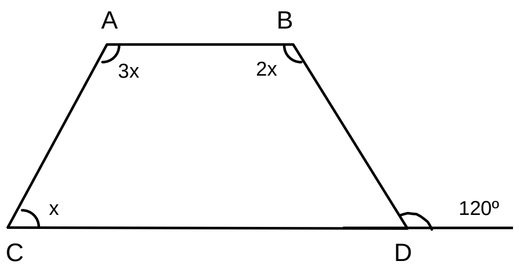


d)

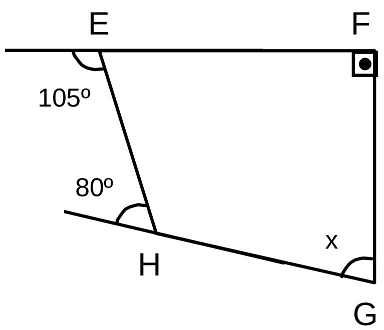


7) Calcule o valor de **x** nos quadriláteros:

a)

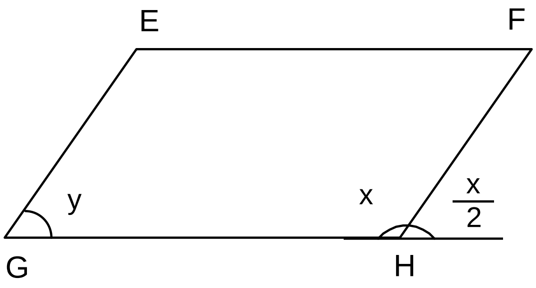


b)

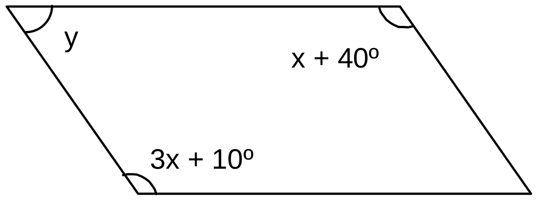


8) Calcule o valor de **x** e **y** nos paralelogramos:

a)



b)

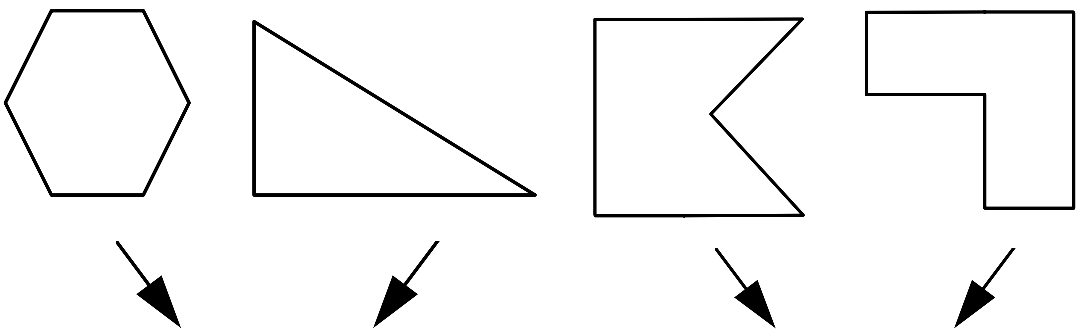


Polígonos Convexos

Polígonos

Polígono é um conjunto de segmentos consecutivos não colineares no qual os extremos do primeiro e do último coincidem.

Exemplos:

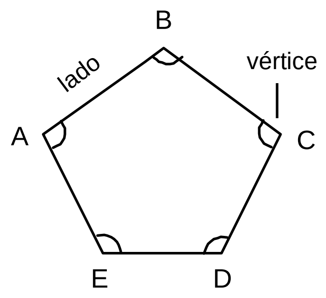


Polígonos convexos   Polígonos não-convexos

Assim como já vimos para os quadriláteros, dizemos que um polígono é convexo quando qualquer segmento com extremidades no polígono está contido nele.

Elementos de um Polígono

Observe o polígono ABCDE:



- A, B, C, D, E são os ***vértices***.
- $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$ são os ***ângulos internos***.
- $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ são os ***lados***.

Nomes dos Polígonos

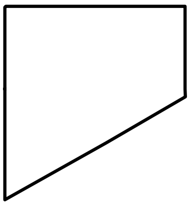
Segundo o número de lados, os polígonos recebem nomes especiais:

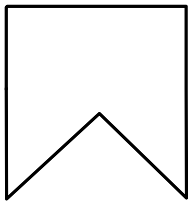
nome	*nº de lados*
triângulo	3
quadrilátero	4
pentágono	5
hexágono	6
heptágono	7
octógono	8
eneágono	9
decágono	10
undecágono	11
dodecágono	12
pentadecágono	15
icoságono	20

- O número de lados de um polígono é igual ao número de vértices.

Exercícios

1) Quais são os polígonos convexos ?

a) 

b) 

c) 

2) Responda:

a) Quantos lados tem um hexágono ?
b) Quantos lados tem um undecágono ?
c) Quantos lados tem um polígono de 15 vértices ?
d) Quantos vértices tem um polígono de 9 lados ?

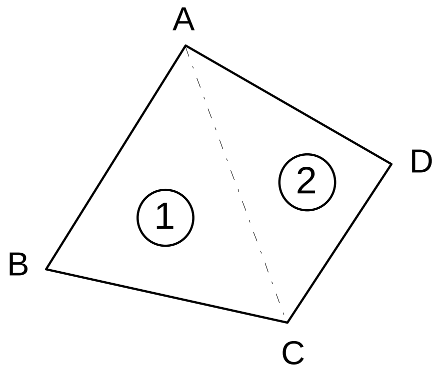
3) Como se chama um polígono de:

a) 5 lados ?
b) 12 lados ?
c) 7 vértices ?
d) 20 vértices ?

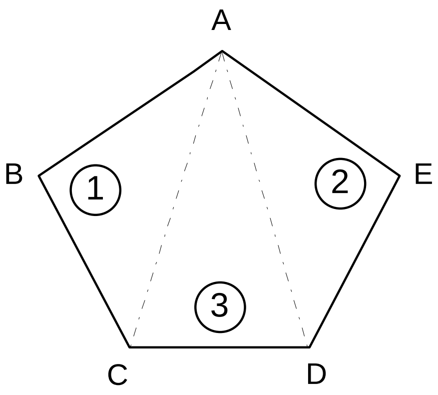
Soma dos ângulos internos de um polígono convexo

A traçar as diagonais que partem de um mesmo vértice de um polígono, nós o dividimos em triângulos, cujo *número de triângulos é sempre o número de lados menos dois.*

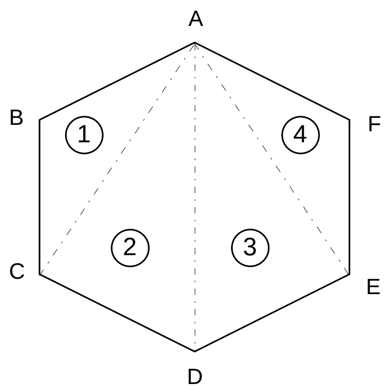
Veja:



4 lados $\Rightarrow$ 2 triângulos



5 lados $\Rightarrow$ 3 triângulos



6 lado $\Rightarrow$ 4 triângulos
. .
. .
. .
. .
. .
. .
. .
. .
. .

n lados $\Rightarrow$ (n - 2) triângulos

Um polígono de n lados será dividido em (n - 2) triângulos. Logo, para obter a soma de seus ângulos internos (S_n), basta multiplicar o número de triângulos por 180º, ou seja:

$$\mathbf{S_n = (n - 2)\ .\ 180^o}$$

Exemplo:

Calcular a soma dos ângulos internos do octógono (n = 8)

Solução:

$$\mathbf{S_n = (n - 2)\ .\ 180^o}$$
$$\mathbf{S_8 = (8 - 2)\ .\ 180^o}$$
$$\mathbf{S_8 = 6\ .\ 180^o}$$
$$\mathbf{S_8 = 1080^o}$$

Resposta: 1080º

Exercícios:

1) Calcule a soma dos ângulos internos dos seguintes polígonos:

   a) pentágono
   b) hexágono
   c) eneágono
   d) decágono
   e) pentadecágono
   f) icoságono

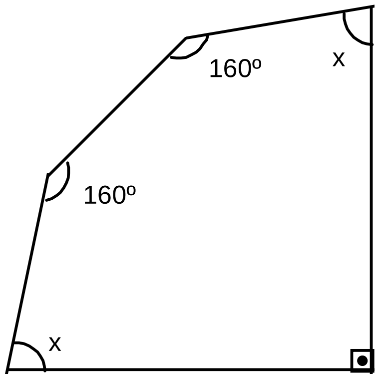
2) Qual a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de 7 vértices ?

3) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 900º. Qual é o polígono ?

4) A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 3240º. Qual é o polígono ?

5) Calcule **x**:

a)



b)

Polígono Regular

Chama-se ***polígono regular*** todo polígono convexo que tem:

a) todos os lados congruentes entre si;

b) todos os ângulos congruentes entre si.

Exercícios:

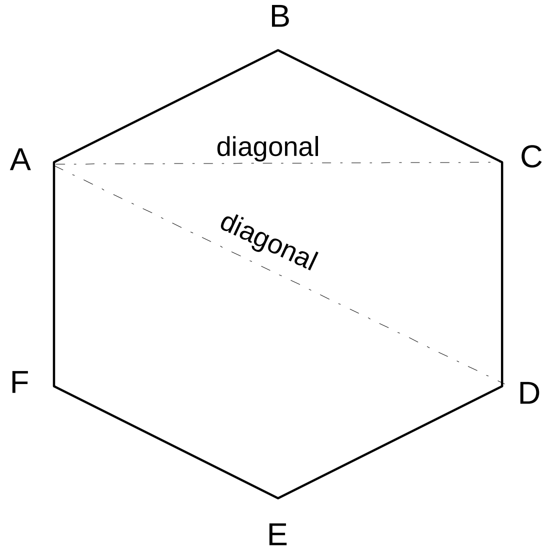
1) Qual é a medida de cada ângulo interno de um triângulo equilátero ?

2) Calcule a medida do ângulo interno de cada polígono regular:

   a) pentágono
   b) hexágono
   c) octógono
   d) dodecágono

Diagonal de um Polígono

Diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono.

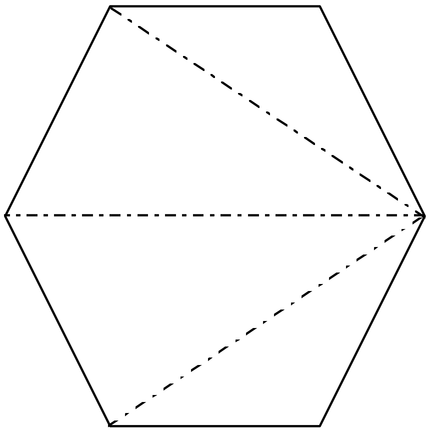


Na figura:

$\overline{AD}$ e $\overline{AC}$ são diagonais.

Número de diagonais de um polígono

Seja um polígono de **n** lados:



a) cada vértice dá origem a **(n - 3)** diagonais.

b) os n vértice dão origem a **n . (n - 3)** diagonais.

c) dividimos os resultado por 2 (cada diagonal foi contada duas vezes).

Assim:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

d = número de diagonais

n = número de lados

Exemplo:

Calcule o número de diagonais de um octógono.

Solução:

Temos:

n = 8

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$d = \frac{8 . (8-3)}{2}$$

$$d = \frac{8 . 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Resposta: 20 diagonais.

Exercícios:

1) Calcule os número de diagonais dos seguintes polígonos:

   a) hexágono
   b) heptágono
   c) eneágono
   d) decágono
   e) dodecágono
   f) icoságono

2) Quantas diagonais tem um polígono de 25 lados ?

3) Qual é o polígono cujo número de lados é igual ao número de diagonais ?

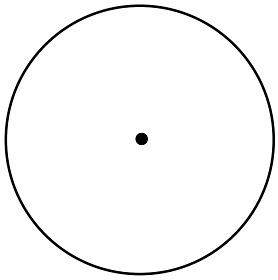
4) Qual é o polígono cujo número de diagonais é o dobro do número de lados ?

5) A soma dos ângulos interno de um polígono convexo é 1080º. Calcule o número de diagonais desse polígono.

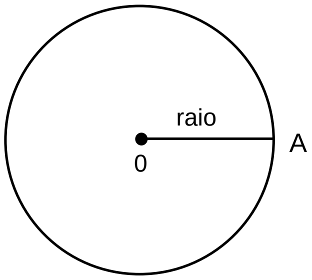
Circunferência e Círculo

Circunferência

Circunferência é o conjunto de pontos de um plano, equidistantes de um ponto do plano chamado centro.



Qualquer segmento com uma extremidade no centro e a outra em um ponto da circunferência chamado de ***raio***.



Na figura:

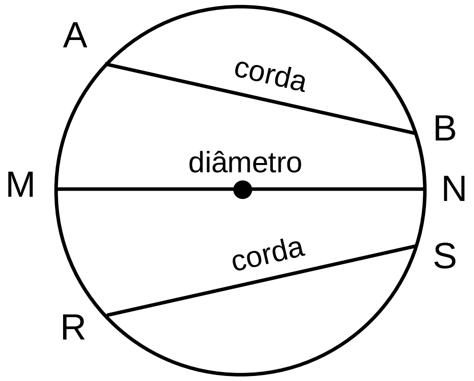
- O é o ***centro*** da circunferência.
- $\overline{OA}$ e o ***raio***.
- Indicação: C (O, r) (*significa: circunferência de centro* O *e raio* r)

Corda do diâmetro

- ***Corda*** é o segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.
- ***Diâmetro*** é a corda que passa pelo centro da circunferência.

Na figura ao lado:

- $\overline{AB}$ e $\overline{RS}$ são cordas.
- $\overline{MN}$ é diâmetro.

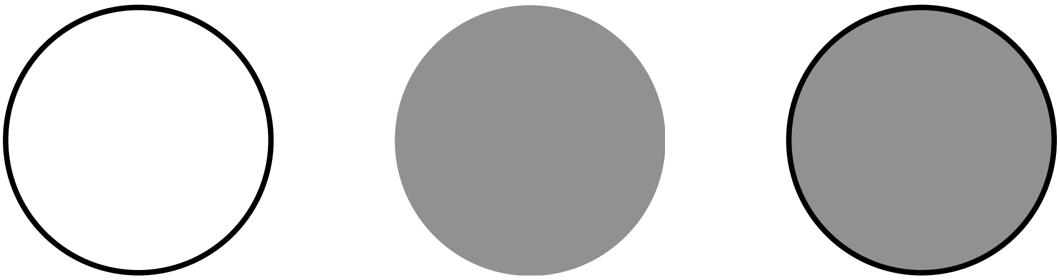


Observe que a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio, ou seja:

$$\mathbf{D = 2\,r}$$

Círculo

Observe as figuras e seus respectivos nomes:



circunferência ***interior ou conjunto dos pontos internos*** ***círculo***

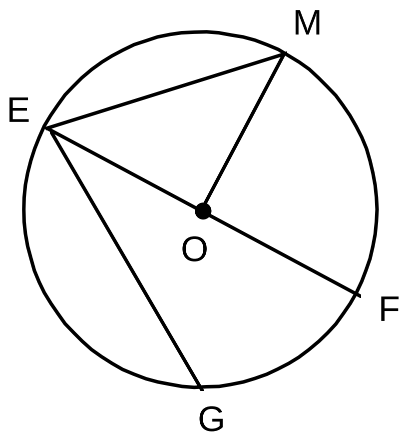
Círculo é a união da circunferência e seu interior.

Convém destacar que:

- Todo ponto da circunferência pertence ao círculo.
- Existem pontos do círculo que não pertencem à circunferência.
- O centro, o raio e o diâmetro da circunferência são também centro, raio e diâmetro do círculo.

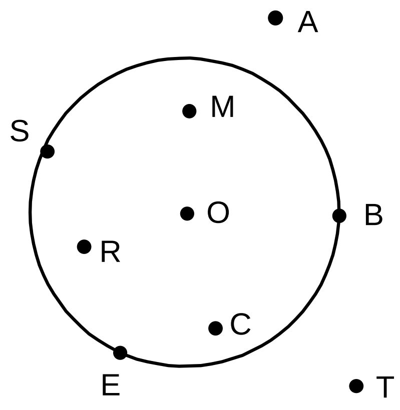
Exercícios

1) Observe a figura e responda:



a) Quais segmentos são raios ?
b) Quais segmentos são cordas ?
c) Quais segmentos são diâmetros ?

2) Dos pontos indicados na figura ao lado:



a) Quais são internos à circunferência ?
b) Quais pertencem à circunferência ?
c) Quais são exteriores à circunferência ?

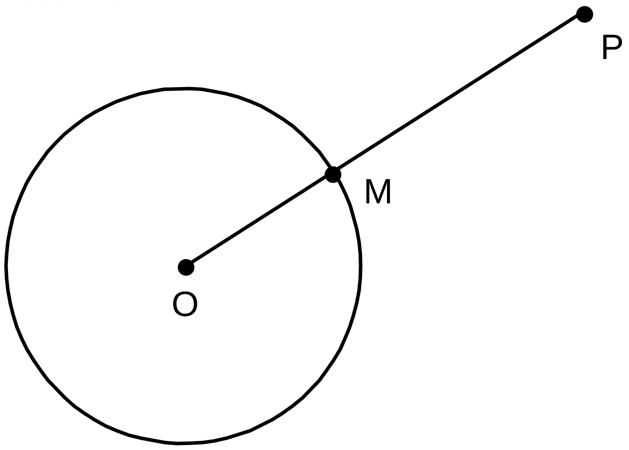
3) Determine:

a) O diâmetro de uma circunferência cujo raio mede 4,5cm.

b) O raio de uma circunferência cujo diâmetro mede 17cm.

c) O diâmetro de um circunferência cujo raio é igual a **x**.

4) O diâmetro da circunferência mede 7cm e o segmento $\overline{OP}$ mede 12cm.



Qual a medida do segmento $\overline{MP}$?

5) O raio de uma circunferência é dado por **r = 2x - 6**. Se o diâmetro mede 20cm, calcule **x**.

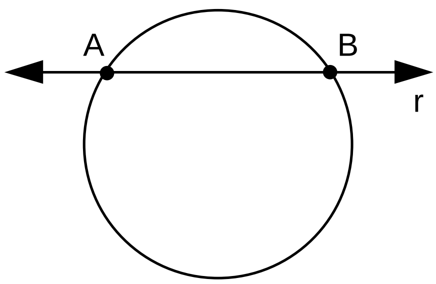
Posições relativas de uma reta e uma circunferência

Uma reta **r** e uma circunferência **C** podem ocupar as seguintes posições:

a) **C** ∩ **r** = { A, B } *(dois pontos comuns)*

Dizemos que:

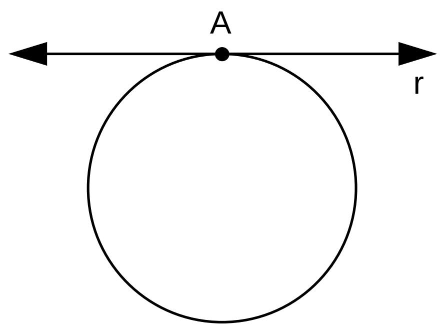
A reta é ***secante*** à circunferência.



b) **C** ∩ **r** = { A } *(um ponto comum)*

Dizemos que:

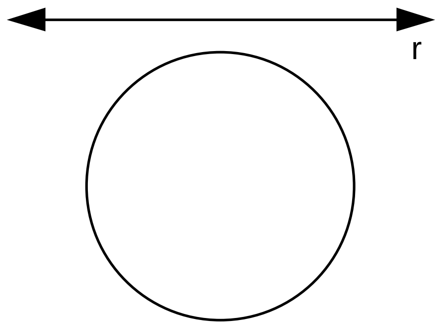
A reta é ***tangente*** à circunferência.



c) **C** ∩ **r** = { ∅ } *(não há ponto comum)*

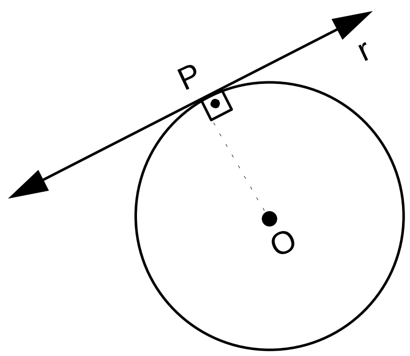
Dizemos que:

A reta é ***extrema*** à circunferência.



Propriedade:

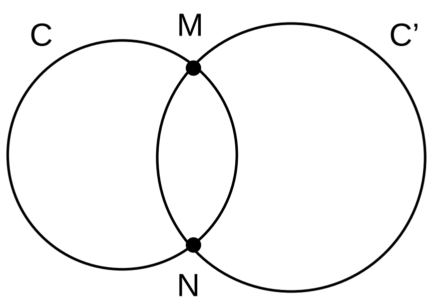
Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.



Posições relativas de duas circunferências

Duas circunferências distintas podem ser:

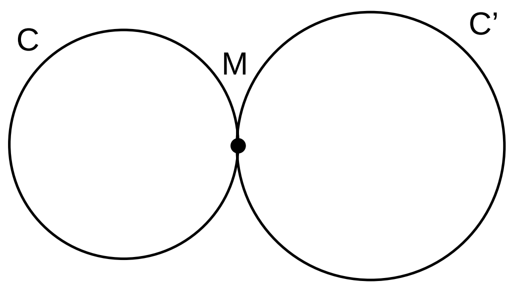
a) ***Secantes***: têm dois pontos comuns.



$C \cap C' = \{ M, N \}$

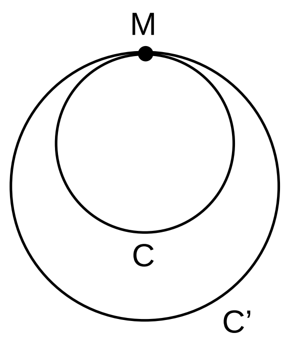
b) ***Tangentes***: têm único ponto comum.

tangentes exteriores



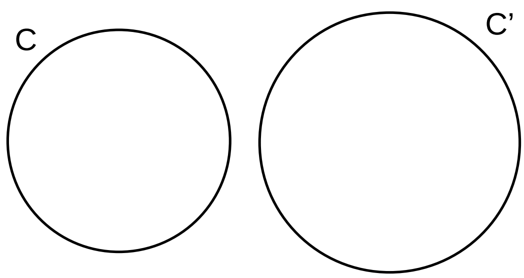
$C \cap C' = \{ M \}$

tangentes interiores



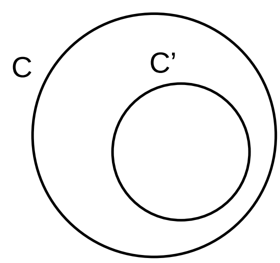
c) ***Não-secantes***: não têm ponto comum.

exteriores



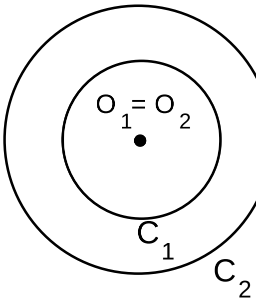
$C \cap C' = \varnothing$

interiores



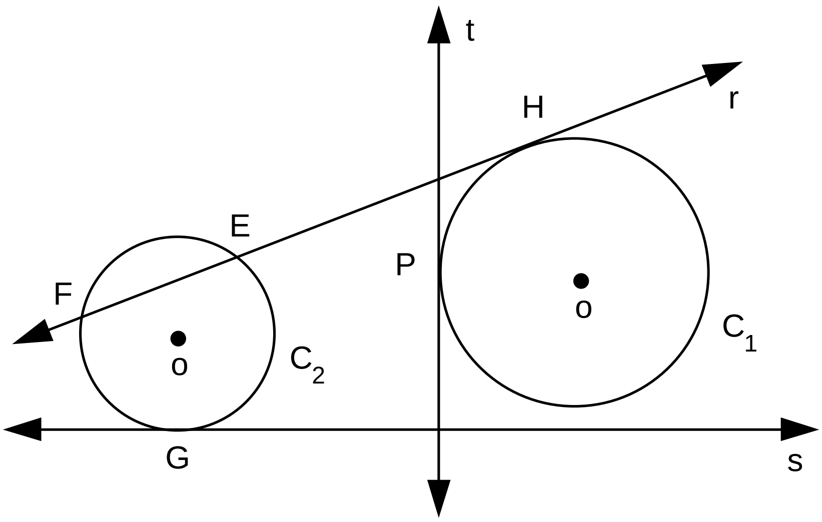
Caso particular:

Duas circunferências não-secantes e que têm o mesmo centro são chamadas ***concêntricas***.



Exercícios:

1) Observe a figura e classifique:



a) A reta **s** em relação à circunferência C_2.

b) A reta **r** em relação à circunferência C_2.

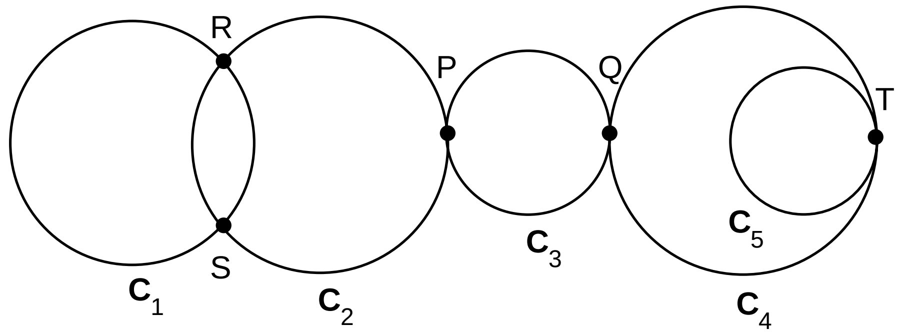
c) A reta **r** em relação à circunferência C_1.

d) A reta **t** em relação à circunferência C_1.

e) A reta **s** em relação à circunferência C_1.

f) A reta **t** em relação à circunferência C_2.

2) Observe a figura e responda:



a) Qual a posição relativa entre as circunferências C_1 e C_2 ?

b) Qual a posição relativa entre as circunferências C_2 e C_3 ?

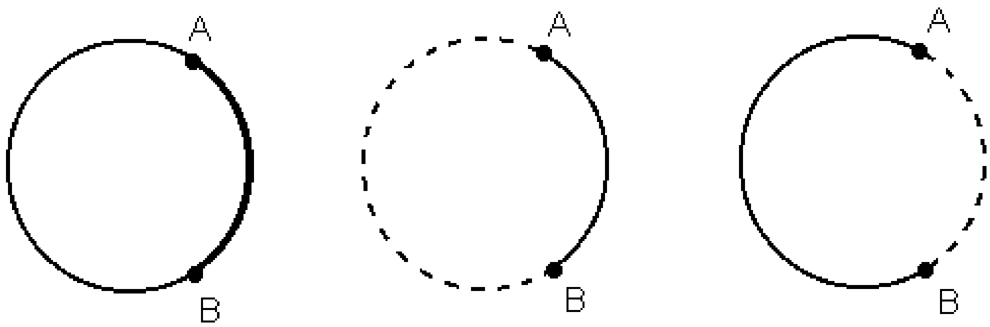
c) Qual a posição relativa entre as circunferências C_1 e C_3 ?

d) Qual a posição relativa entre as circunferências C_3 e C_4 ?

e) Qual a posição relativa entre as circunferências C_3 e C_5 ?

Arcos

Dados dois pontos distintos **A** e **B** sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessa partes é denominada ***arco***.



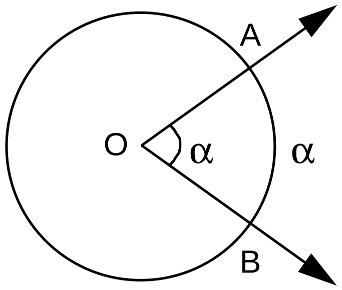
arco menor ***arco maior***

Indicação: $\overline{AB}$

Os pontos **A** e **B** são as extremidades desses arcos.

Ângulo central

Ângulo central é aquele cujo vértice está no centro da circunferência.



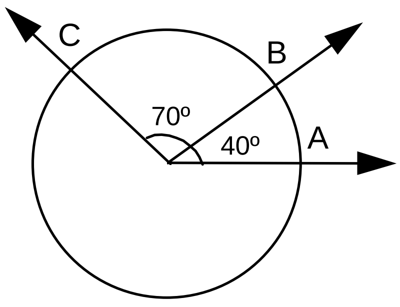
Observe que:

O ângulo central e o arco determinado por ele têm a mesma medida.

Na figura, temos: m (AÔB) = m ($\overline{AB}$) = α

Exercícios:

1) Observe a figura e determine o arco menor solicitado:

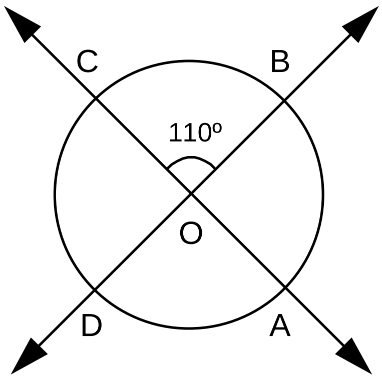


a) m ($\overline{AB}$)

b) m ($\overline{BC}$)

c) m ($\overline{AC}$)

2) Observe a figura e determine o arco menor solicitado:

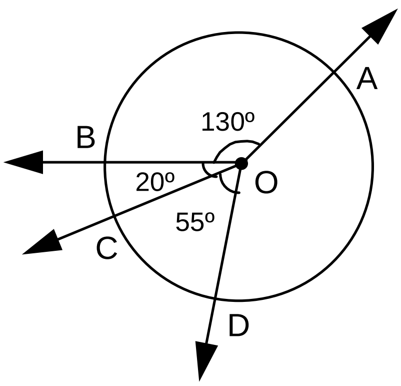


a) $m(\overline{BC})$ d) $m(\overline{AD})$

b) $m(\overline{CD})$ e) $m(\overline{BD})$

c) $m(\overline{AB})$ f) $m(\overline{AC})$

3) Observe a figura e determine o arco menor solicitado:



a) $m(\overline{CD})$

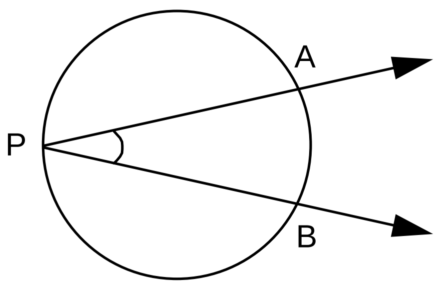
b) $m(\overline{BC})$

c) $m(\overline{AC})$

d) $m(\overline{BD})$

Ângulo inscrito

Ângulo inscrito é aquele cujo vértice pertence à circunferência e cujos lados são semi-retas secantes.

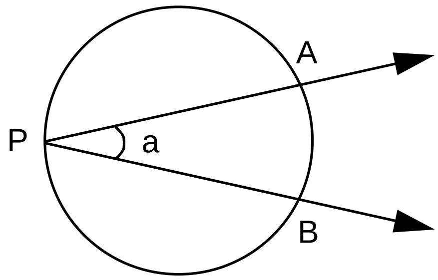


$A\hat{P}B$ é o ângulo inscrito

Propriedade:

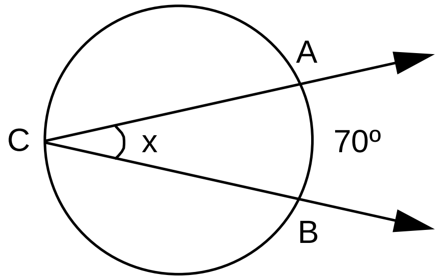
A medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco correspondente.

Na figura, temos:



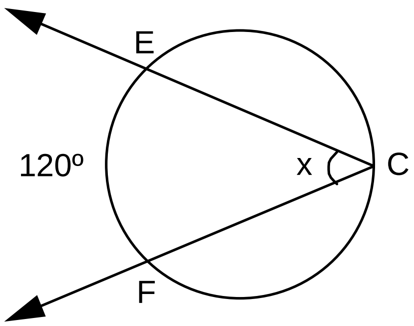
$$\hat{a} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

Exemplos:



Solução:

$$x = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{70^o}{2} = 35^o$$

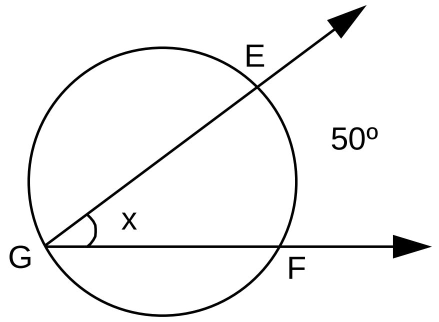


Solução:

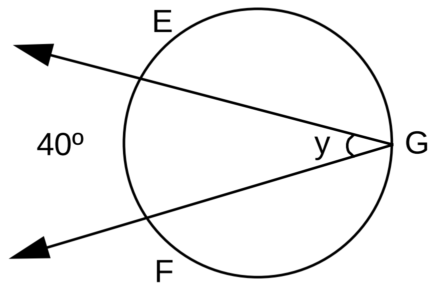
$$x = \frac{\overline{EF}}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$$

Exercícios:

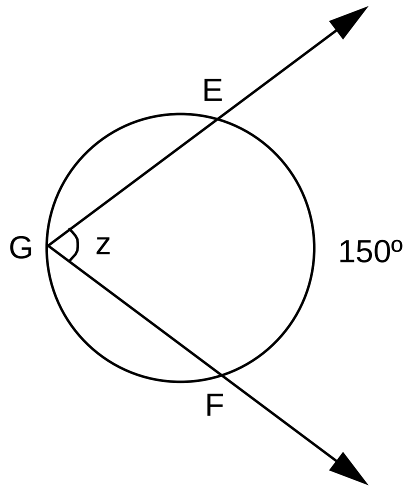
a)



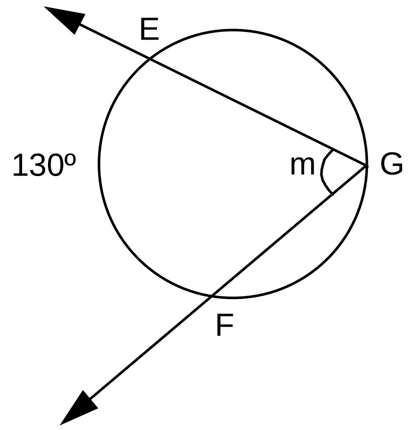
b)



c)



d)



Sistema Métrico Decimal - Medidas de Massa

Introdução

O que, de modo comum, chamamos peso de um corpo é, na realidade matemática e física, a ***massa*** do corpo.

Sabemos que o peso de um corpo varia conforme o local em que se encontra esse corpo (a ação da gravidade varia de local para local da Terra), enquanto a massa do corpo é constante.

Vamos estudar, portanto, as medidas de massa.

O Quilograma e o Grama

A unidade fundamental (e legal) para as medidas de massa dos corpos é o ***quilograma***, que se abrevia **kg**.

O quilograma é a massa aproximada de 1 dm^3 de água destilada à temperatura de 4ºC.

Porém, de modo prático, usamos como unidade principal o ***grama*** (**g**), que é a ***milésima parte do quilograma***.

Vejamos a tabela de múltiplos e submúltiplos do grama.

Múltiplos			**u.f.**	**Submúltiplos**		
quilograma **kg** 1000**g**	hectograma **hg** 100**g**	decagrama **dag** 10**g**	grama **g** 1**g**	decigrama **dg** 0,1**g**	centigrama **cg** 0,01**g**	miligrama **mg** 0,001**g**

	10		10		10		10		10		10	
kg		hg		dag		g		dg		cg		mg

Cada unidade de massa é 10 vezes maior que a unidade imediatamente inferior, isto é, as sucessivas unidades de massa variam de 10 em 10.

Transformação de Unidades

Observe o exemplo e faça as transformações:

a) 2 kg = (2 x 1.000) g = 2.000 g

b) 6 g = (................................) cg = ... cg

c) 1.600 g = (..............................) kg = ... kg

d) 35.000 mg = (............................) g = ... g

e) 2,35 kg = (............................) hg = ... hg

f) 16,2 dg = (............................) g = ... g

Unidades Especiais

Além das unidades vistas anteriormente, temos unidades especiais:

a tonelada = (t) = 1.000 kg
o megaton = 1.000 t ou 1.000.000 kg

servem para medir grandes massas.

o quilate = 0,2 g → serve para medir pedras e metais preciosos

Relação Importante

Considerando as definições de litro e de quilograma, pode-se estabelecer para a água destilada à temperatura de 4ºC o seguinte quadro:

volume		capacidade		massa
1 dm^3	=	1 λ	=	1 gk

Exercícios

1) Você deve completar as sentenças seguintes:

a) Um tanque está inteiramente cheio e contém um volume de $12m^3$ de água pura. Qual o peso (massa) de água nesse tanque:

$12\ m^3$ = (......................................) dm^3 = ... kg.

b) Uma caixa tem um volume de $1.650\ cm^3$. Qual o peso máximo de água pura que pode conter ?

$1.650\ cm^3$ = (......................................) dm^3 = ... kg.

c) Uma caixa d'água está totalmente cheia de água pura. Sua capacidade é 35.000 λ. Qual o peso ?

35.000 λ = ... kg.

d) O peso (massa) de água pura contida num recipiente é 6.000 kg. Qual o volume de água pura desse recipiente?

6.000 kg = ... dm^3 = (..........................) m^3 = ... m^3.

e) A massa de uma pedra preciosa é 18 quilates. A quantos g corresponde ?

18 quilates = ... x .... = ... g.

f) 10 λ = ... dm^3 = ... kg (de água pura).

2) Transformar para a unidade imediatamente inferior:

a) 3 t
b) 12 dag
c) 2,5 kg
d) 3,41 g
e) 2,5 t

3) Transformar para a unidade imediatamente superior:

a) 50 g
b) 6.500 kg
c) 38,5 dg
d) 285 hg
e) 120 mg

4) Transformar em kg.

a) 1,5 t
b) 28 hg
c) 9.600 g
d) 42 t
e) 12.500 g

5) Transformar em g:

a) 3,2 kg
b) 2 t
c) $\frac{1}{4}$ kg
d) 1.300 mg
e) 61 quilates
f) $\frac{1}{2}$ kg
g) 4,5 hg
h) 24 quilates
i) 0,75 kg
j) 142,5 cg

6) Resolver os seguintes problemas:

a) Um carro tanque, inteiramente cheio, transporte 12 m^3 de água pura. Qual é o peso (massa) da água transportada ?
b) As medidas de um reservatório são 7 m; 5 m e 4 m. Estando inteiramente cheio esse reservatório com água pura, qual é o peso (massa) dessa água ?

c) Uma caixa cúbica tem 0,5 m de aresta (internamente). Que peso (massa) máximo de água pura pode conter ?

d) Um reservatório tem uma capacidade para 20.000 λ. Qual o peso (massa) de água pura que esse reservatório pode conter quando inteiramente cheio ?

e) A massa de um diamante é 324,5 quilates. Qual o peso (massa) desse diamante em g ?

Medidas não decimais

Medidas Complexas

Existem medidas que podem ser escritas em várias unidades, como:

5 horas 20 minutos 10 segundos.

22 graus 30 minutos.

2 anos 3 meses 20 dias.

Essas medidas são chamadas ***medidas complexas*** e, entre elas, estudaremos as ***medidas de tempo*** (as medidas de ângulo serão estudadas na 7ª série).

Medidas de Tempo

No quadro abaixo, menos as unidades de medida de tempo.

Unidades	***Símbolo***	***Valores***
ano comercial	a	360 dias
mês comercial	me	30 dias
dia	d	24 horas
hora	h	60 minutos
minuto	min	60 segundos
segundo	s	-

Observamos que as unidades de tempo não têm, entre si, relações decimais.

Além das unidades constantes do quadro, são também usuais as unidades:

Semana (7 d); ***Quinzena*** (15 d); ***Bimestre*** (2 me); ***Trimestre***

(3 me);

Transformação de medida complexa em medida simples

Seja transformar 2h 20min 12s em segundos.

2 X 60 =	120 min	140 X 60 =	8.400 s
	20 min		12 s
	140 min		8.412 s

Então: 2h 20min 12s = 8.412s.

Exercícios:

1) Observando o exemplo dado, transforme:

a) 1h 40min = ... min.
b) 3h 10min 20s = ... s.
c) 2d 10h = ... h.
d) 4me 20d = ... d.
e) 1a 6me 10d = ... d.

Transformação de medida simples em medida complexa

Seja transformar 820 dias em anos, meses e dias.

820 d	30	27 me	12
220	27 me		2 a
10 d			

Exercício:

1) Observando o exemplo dado, transforme:

a) 350 min a h → .... h .... min
b) 81.020 s a h → .... h .... min .... s
c) 80 h a d → .... d .... h
d) 135 d a me → .... me .... d
e) 940 d a a → .... a .... me .... d

Operações com medida complexas

1. Adição

1º exemplo: 2h 10min 20s + 3h 40min 15s

2h 10min 20s
3h 40min 15s
5h 50min 35s

2º exemplo: 3h 40min + 6h 35min

3h 40min
6h 35min
~~9h~~ ~~7~~5min fazendo a
10h 15min transformação

2. Subtração com medidas complexas

1º exemplo: 5h 40min - 2h 20min 30s

5h 40min	5h 39min 60s
- 2h 20min 30s	- 2h 20min 30s
	3h 19min 30s

2º exemplo: 5me - 2me 20d

5me	4me 30d
- 2me 20d	- 2me 20d
	2me 20d

Exercícios:

1) Observando os exemplos calcule:

a) 1h 20min 10s + 2h 10min 40s = ... h .... min .... s

b) 2h 40min 50s + 1h 35min 30s = ... h .... min .... s = ... h .... min .... s

c) 3d 18h + 2d 12h = ... d .... h = ... d .... h

d) 2me 20d + 3me 15d = ... me .... d = ... me .... d

e) 1a 9me 25d + 1a 6me 15d = ... a .... me .... d = ... a .... e .... d.

2) Observando os exemplos calcule:

a) 3h 40min 50s - 1h 10min 20s = ... h .... min .... s

b) 5h 25min 10s - 2h 14min 50s = ... h .... min .... s

c) 3d - 1d 20h = ... d .... h

d) 4h - 1h 30min = ... h .... min

e) 6 me - 2me 20d = ... me .... d

f) 4 a 8m 10d - 2a 6m 20d = ... a .... me .... d

3. Multiplicação e divisão de medida complexa por número inteiro

1º exemplo: (1h 20min 18s) x 4

1h 20min 18s
x 4
4h ~~80min~~ ~~72s~~ fazendo a
~~4h~~ ~~81min~~ 12s transformação
5h 21min

2º exemplo: (25h 27min 20s) : 2

25h 27min 20s | 2
05 60min + 60s 12h 43min 40s
1s 87min 80s
07 00
1min

Exercícios:

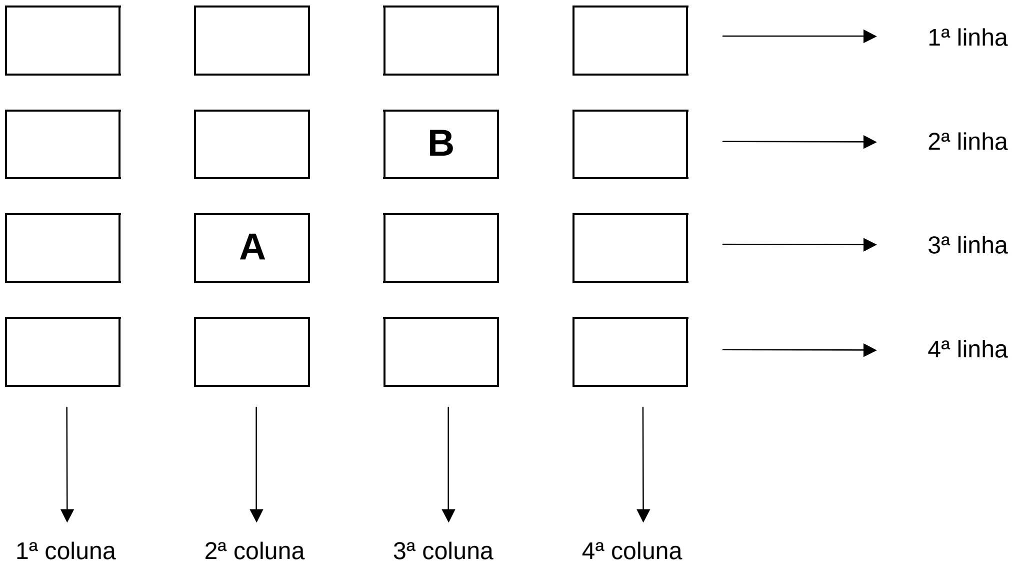
1) Observando os exemplos dados, calcule:

a) (2h 10min 20s) x 2 = ... h .... min .... s
b) (10h 35min 50s) : 5 = ... h .... min .... s
c) (1h 25min 30s) x 3 = ... h .... min .... s = ... h .... min .... s
d) (4h 15min) : 3 = ... h .... min
e) (1me 20d) x 2 = ... me .... d = ... me .... d
f) (3 e 5me 10d) : 2 = ... a .... me .... d

Produto Cartesiano

Par Ordenado

Observando a disposição dos cartões na figura abaixo:



- O cartão A está situado na terceira linha e segunda coluna. Vamos indicar esse fato por: (3, 2).
- O cartão B está situado na segunda linha e terceira coluna. Vamos indicar esse fato por: (2,3).

Como os cartões ocupam lugares diferentes, é fácil perceber que:

$$\mathbf{(3, 2) \neq (2, 3)}$$

Observe que um ***par ordenado*** é indicado entre parênteses e os elementos são separados por vírgula.

par ordenado:

(3, 2)

2º elemento: 2

1º elemento: 3

par ordenado:

(2, 3)

2º elemento: 3

1º elemento: 2

Igualdade de pares ordenados

Dois pares ordenados são iguais somente se tiverem os primeiros elementos iguais entre si também os segundos elementos iguais entre si.

Assim:

$$(a, b) = (c, d) \Leftarrow\Rightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Exemplo:

Determinar **x** e **y** de modo que os pares ordenados $(2x + 7,\ 5y - 9)$ e $(x + 3,\ 3y - 3)$ sejam iguais.

Solução:

$$(2x + 7,\ 5y - 9) = (x + 3,\ 3y - 3)$$

Então:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 7 &=& x + 3 \\ 2x - x &=& 3 - 7 \\ x &=& -4 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} 5y - 9 &=& 3y - 3 \\ 5y - 3y &=& -3 + 9 \\ 2y &=& 6 \\ y &=& 3 \end{array}$$

Logo: $x = -4$ e $y = 3$

Exercícios:

1) Copie e complete com os símbolos **=** ou $\neq$:

a) (6, 0) .... (0, 6)
b) (5, -1) .... (5, -1)
c) (2, 5) .... ($\frac{6}{3}$, $\frac{10}{2}$)
d) (-3, 8) .... (8, -3)
e) (-4, -2) .... (-2, -4)
f) (-1, 2) .... ($\frac{3}{8}$, $\frac{8}{2}$)

2) Determine **x** e **y** para que cada uma das igualdades seja verdadeira:

a) (x, y) = (8, -6)

b) (6, y) = (x, 0)

c) (x, -4) = (-3, y)

d) (2x, -5) = (8, y)

e) (x, y + 2) = (5, 9)

f) (3x, 2y) = (-12, -6)

g) (x - y, 5) = (0, y)

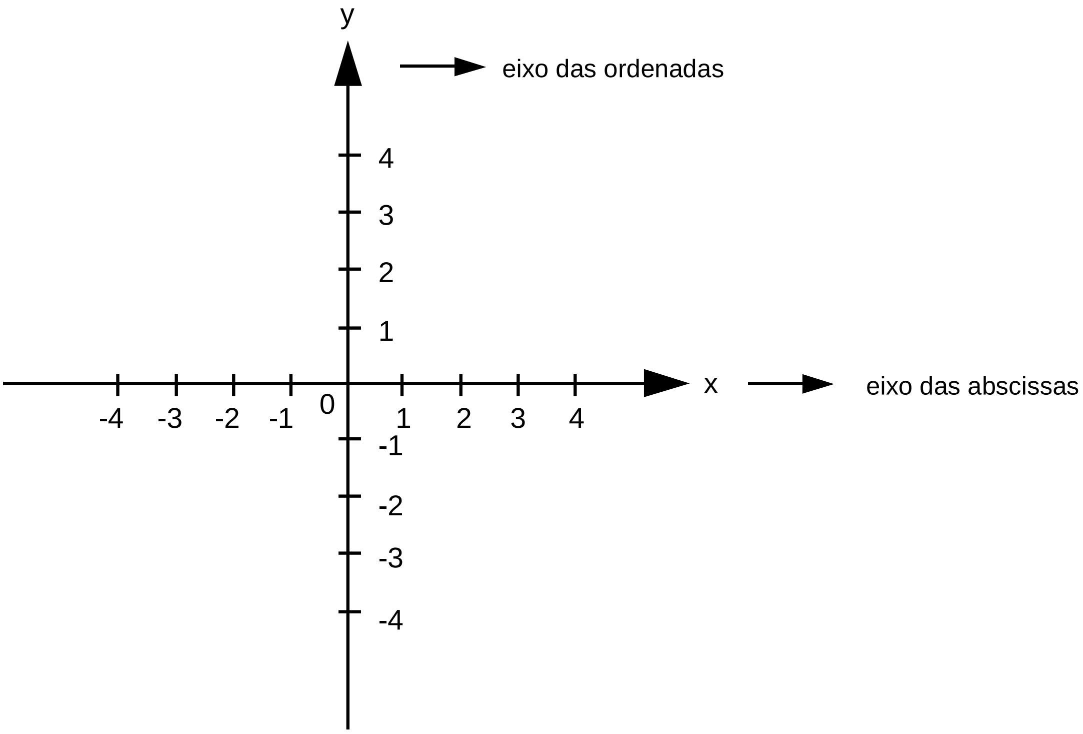
h) (x + 1, y - 1) = (3, 7)

i) (x - 2, 7 - y) = (-2, 6)

j) (3x + 2, 2y -6) = (2x - 1, y + 2)

Plano Cartesiano

Consideramos duas retas numeradas (perpendiculares), denominadas eixos, que se interceptam no ponto zero (origem).



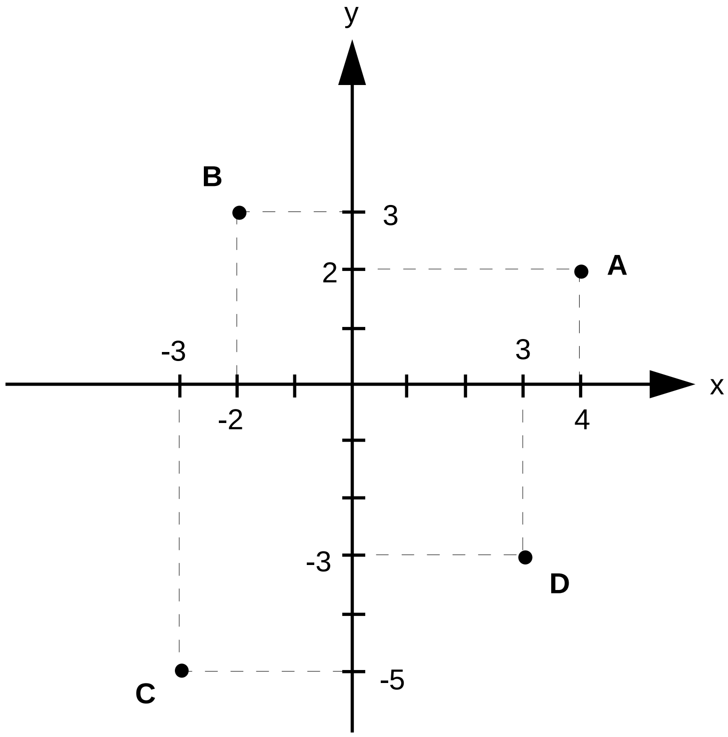
A representação de um ponto no plano é feita por meio de dois números reais:

- o primeiro número do par ordenado chama-se ***abcissa*** do ponto.
- o segundo número do par chama-se ***ordenada*** do ponto.

Exemplos:

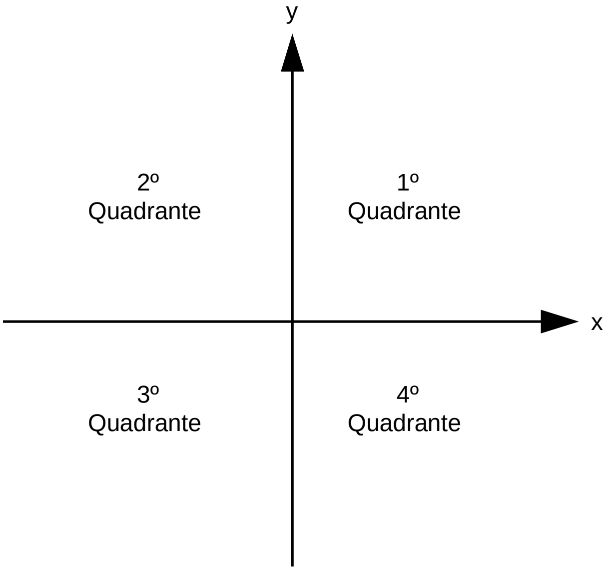
Vamos representar os seguintes pares ordenados:

- A (4, 2)
- B (-2, 3)
- C (-3, -5)
- D (3, -3)



Quadrantes

As retas **x** e **y** dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas **quadrantes**, que são numeradas conforme a figura abaixo.



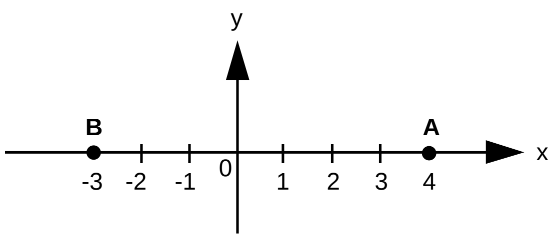
A seguir, indicamos os sinais das abcissas e das ordenadas em cada quadrante:

1º quadrante (+, +)
2º quadrante (-, +)
3º quadrante (- , -)
4º quadrante (+, -)

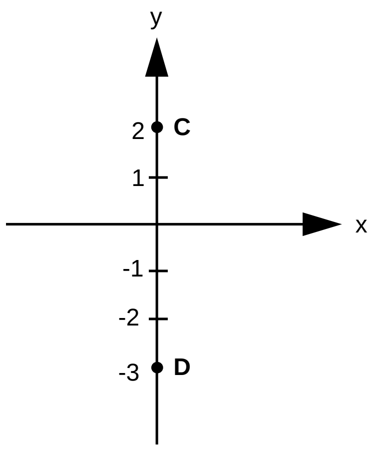
Convencionou-se que os pontos situados sobre os eixos não pertencem a nenhum dos quadrantes.

Observações:

- Os pontos pertencentes ao eixo **x** têm ordenada nula. Vamos representar os pontos:
  - A (4, 0)
  - B (-3, 0)

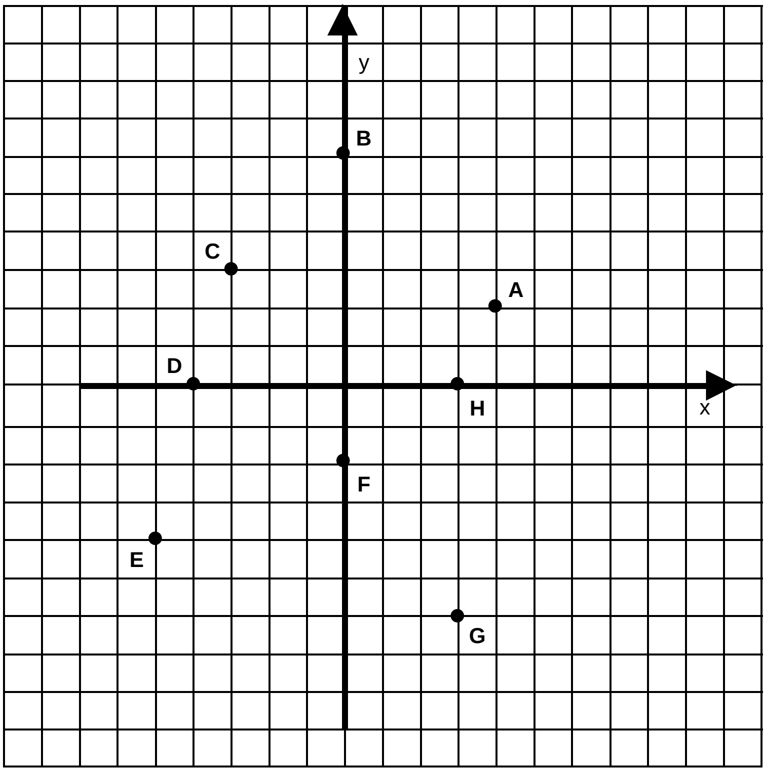


- Os pontos pertencentes ao eixo **y** têm abcissa nula. Vamos representar os pontos:
  - A (0, 2)
  - B (0, -3)



Exercícios:

1) Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano:



2) Represente, no plano cartesiano, os pontos:

- A (3, 4)
- B (4, 3)
- C (-4, 1)
- D (-2, 5)
- E (-3, -4)
- F (-2, -1)
- G (3, -2)
- H (4, -1)
- I (5, 2)
- J (-1, -2)
- L (-3, 1)
- M (5, -1)

3) No exercícios anterior:

a) Quais os pontos que pertencem ao 1º quadrante ?
b) Quais os pontos que pertencem ao 2º quadrante ?
c) Quais os pontos que pertencem ao 3º quadrante ?
d) Quais os pontos que pertencem ao 4º quadrante ?

4) Represente, no plano cartesiano, os pontos:

- A (5, 0)
- B (1, 0)
- C (-3, 0)
- D (0, 4)
- E (0, 1)
- F (0, -4)

5) No exercício anterior:

a) Quais os pontos que pertencem ao eixo **x** ?

b) Quais os pontos que pertencem ao eixo **y** ?

Produto Cartesiano

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se ***produto cartesiano*** de A e B ao conjunto de todos os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo pertence a B.

Indicamos: **A** X **B** e lemos “**A** cartesiano **B**”.

Exemplo:

Sendo A = { 1, 2 } e B = { 3, 4, 5 }, temos:

- A x B = { (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2 , 5)}
- B x A = { (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5 , 2)}

Observe que, em geral: **A** x **B** $\neq$ **B** x **A**

Ilustrando:

	3	(1, 3)		1	(1, 3)
1	4	(1, 4)	1	2	(1, 4)
	5	(1, 5)		1	(1, 5)
	3	(2, 3)	2	2	(2, 3)
2	4	(2, 4)		1	(2, 4)
	5	(2, 5)	3	2	(2, 5)
A	B	A x B	B	A	B x A

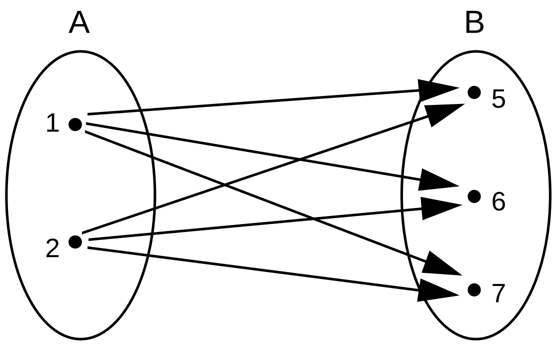
Diagrama de flechas

O produto cartesiano também pode ser representado por diagramas de flechas.

Exemplo:

Dados os conjuntos A = { 1, 2 } e B = { 5, 6, 7 }

Observe no esquema
que cada flecha
representa um par.



Então: A x B = { (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7) }

Número de elementos

Observe no diagrama de flechas acima que:

- O conjunto A tem 2 elementos.
- O conjunto B tem 3 elementos.
- O número de elementos de A x B é: 2 x 3 = 6.

Conclusão:

O número de elementos de A x B é igual ao número de elementos de A vezes o número de elementos de B.

Exercícios:

1) Se A = { 4, 6 }, B = { -3 } e C = { 0, -8 }, determine:

a) A x C
b) C x A
c) A x B
d) B x A
h) C x B
i) B x C
j) A x A
k) B x B

2) Sendo A = { -1, 0, 1 } e B = { 7, 9 }, determine A x B e B x A.

3) Se um conjunto A possui 3 elementos e um conjunto B possui 4 elementos, dê o número de elementos de cada um dos conjuntos:

a) A x B
b) B x A
c) A x A
d) B x B

4) Se (x, 2) = (5, y), então o valor de x + y é:

a) 3
b) 4
c) 7
d) 10

5) (ESAN-SP) Os valores de x e y de modo que os pares ordenados (x - 3, 2y + 1) e (2x + 2, - y - 8) sejam iguais são:

a) (- 1, 7)
b) (- 9 , - 5)
c) (- 5, - 9)
d) n.d.a.

Função do 1º grau

Chama-se função do 1º grau a função definida por:

$$\mathbf{y = ax + b}$$

onde **a** e **b** são números reais e **a** $\neq 0$.

Exemplos:

1) $y = 2x + 1$
2) $y = -x + 5$
3) $y = 3x$
4) $y = -4x$

Observações:

- *A função do 1º grau é também chamada de* função afim.
- *Se b = 0 (exemplos **3** e **4**), a função também é dita* linear

Exercícios:

1) Quais são funções do 1º grau ?

a) $y = x + 6$
b) $y = 5x - 1$
c) $y = 2 - 3x$
d) $y = \frac{x}{5} - 7$
e) $y = x^2$
f) $y = 8x$
g) $y = \sqrt{x}$
h) $y = \frac{4}{x}$
i) $y = x^2 - 3$
j) $y = -4x - 9$
k) $y = x^2 - 5x + 6$
l) $y = \frac{1}{3} - 4x$

2) Verifique se a função $y = 3(x + 1) + 2(x - 1)$ é do 1º grau.

3) Verifique se a função $y = (3x + 1)(3x - 1) - 9x^2 + 4x$ é do 1º grau.

Representação gráfica da função do 1º grau

Vamos construir o gráfico da função:

$$\mathbf{y = x + 1}$$

Vamos atribuir valores quaisquer para **x** e obter, pela substituição, os valores correspondentes de **y**.

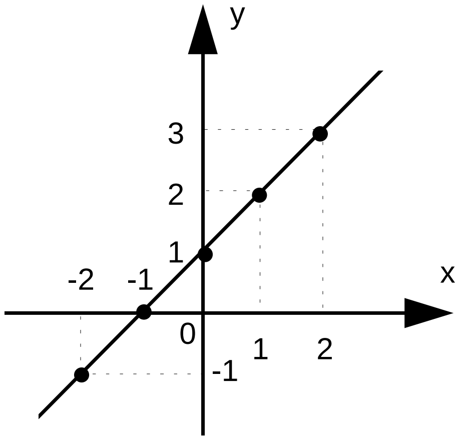
Veja:

Para	$x = 2$	$\Rightarrow$	$y = 2 + 1$	$\Rightarrow$	$y = 3$
Para	$x = 1$	$\Rightarrow$	$y = 1 + 1$	$\Rightarrow$	$y = 2$
Para	$x = 0$	$\Rightarrow$	$y = 0 + 1$	$\Rightarrow$	$y = 1$
Para	$x = -1$	$\Rightarrow$	$y = -1 + 1$	$\Rightarrow$	$y = 0$
Para	$x = -2$	$\Rightarrow$	$y = -2 + 1$	$\Rightarrow$	$y = -1$
	⋮				⋮

A seguir, representamos os pontos no plano cartesiano e, unindo-os, obteremos o gráfico da função y = x + 1, que é uma reta.

Tabela ***Pontos*** ***Gráfico***

x	y		
2	3	→	(2, 3)
1	2	→	(1, 2)
0	1	→	(0 , 1)
-1	0	→	(-1, 0)
-2	-1	→	(-2, -1)
.	.		
.	.		
.	.		



Como o gráfico de uma função do 1º grau é sempre um ***reta***, basta localizar dois de seus pontos para traçá-lo.

Exemplo 1

Traçar o gráfico da função y = 4x - 1

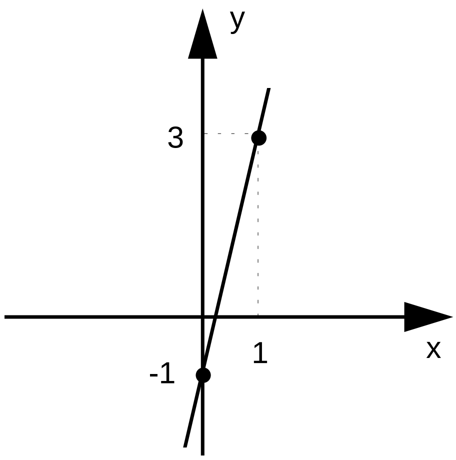
Solução:

Para $x = 0 \Rightarrow y = 4 . 0 - 1 \Rightarrow y = -1$

Para $x = 1 \Rightarrow y = 4 . 1 - 1 \Rightarrow y = 3$

Tabela ***Pontos*** ***Gráfico***

x	y		
0	-1	→	(0 , -1)
1	3	→	(1, 3)



Nota:

Os valores atribuídos a **x** são arbitrários, mas, de preferência, atribuímos valores inteiros, para facilitar os cálculos e a marcação dos pontos no plano.

Exemplo 2

Traçar o gráfico da função y = 2x.

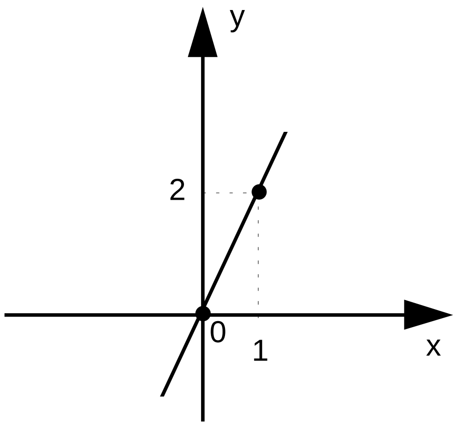
Solução:

Para x = 0 $\Rightarrow$ y = 2 . 0 $\Rightarrow$ y = 0

Para x = 1 $\Rightarrow$ y = 2 . 1 $\Rightarrow$ y = 2

Tabela | ***Pontos*** | ***Gráfico***

x	y		Pontos
0	0	$\rightarrow$	(0 , 0)
1	2	$\rightarrow$	(1, 2)



Exemplo 3

Traçar o gráfico da função y = -3x + 2.

Solução:

Para x = 0 $\Rightarrow$ y = -3 . 0 + 2$\Rightarrow$ y = 2

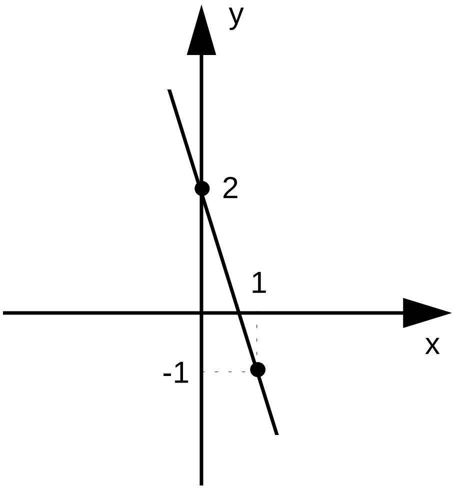
Para x = 1 $\Rightarrow$ y = -3 . 1 + 2$\Rightarrow$ y = -1

Tabela | ***Pontos*** | ***Gráfico***

x	y
0	2
1	-1

$\rightarrow$ (0 , 2)

$\rightarrow$ (1, -1)



Exercícios:

1) Faça o gráfico das funções definidas por:

a) $y = x + 3$
b) $y = 2x - 1$
c) $y = 4x$
d) $y = -2x$
e) $y = 3x + 2$
f) $y = -2x + 1$
g) $y = x$
h) $y = 4 - x$
i) $y = -x + 5$
j) $y = 1 = 3x$

2) Faça o gráfico das funções definidas por:

a) $y = \frac{x}{2}$
b) $y = \frac{x}{2} + 1$
c) $y = \frac{1}{3}x - 2$
d) $y = -\frac{x}{4} + 2$

3) Faça o gráfico das funções definidas por:

a) $y - x = 3$
c) $2y - 2x = 4$

4) Faça o gráfico das funções definidas por:

a) $y = 2 (2x - 1)$ b) $y = 2x + (x - 2)$

5) Represente numa mesma figura os gráficos de $y = x + 1$ e $y = 2x -1$

Função Constante

A ***função constante*** é definida por:

$$\mathbf{y = b} \qquad \text{(b é um número real)}$$

Exemplos:

a) $y = 2$ b) $y = - 3$

Vamos traçar o gráfico da função $y = 2$.

Esta função pode ser escrita assim: $y = 0 . x + 2$.

Para qualquer valor real de x, o valor correspondente de y será sempre 2.

Veja:

Para $x = -1 \Rightarrow y = 0 . (-1) + 2 \Rightarrow y = 2$

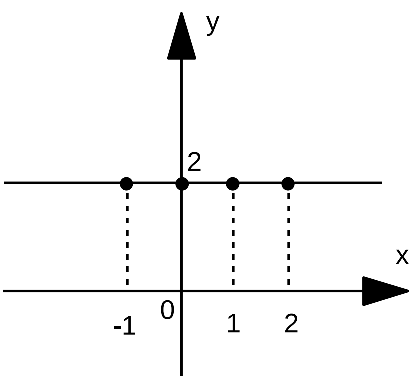
Para $x = 0 \Rightarrow y = 0 . (0) + 2 \Rightarrow y = 2$

Para $x = 1 \Rightarrow y = 0 . (1) + 2 \Rightarrow y = 2$

Para $x = 2 \Rightarrow y = 0 . (2) + 2 \Rightarrow y = 2$

Tabela ***Pontos*** ***Gráfico***

x	y		Pontos
2	3	$\rightarrow$	(2, 3)
1	2	$\rightarrow$	(1, 2)
0	1	$\rightarrow$	(0 , 1)
-1	0	$\rightarrow$	(-1, 0)
-2	-1	$\rightarrow$	(-2, -1)



O gráfico de um função constante é uma reta paralela ao eixo x.

Exercícios:

1) Quais são funções constantes ?

a) $y = x$
b) $y = 5$
c) $y = \frac{1}{2}$
d) $y = -6$
e) $y = 1$
f) $y = -x + 1$

2) Faça o gráfico das seguintes funções constantes:

a) $y = 3$
b) $y = 1$
c) $y = 4$
d) $y = -3$
e) $y = -1$
f) $y = -4$

Zeros da função do 1º grau

Chama-se ***zero da função do 1º grau*** o valor de x para o qual y = 0.

Assim, para calcular o zero da função, basta resolver a equação do 1º grau $ax + b = 0$, ($a \neq 0$).

Exemplos:

1) Determinar o zero da função $y = 3x - 15$.

Solução:

Fazendo y = 0, temos:

$$3x - 15 = 0$$
$$3x = 15$$
$$x = \frac{15}{3}$$
$$x = 5$$

Nota: A reta $y = 3x - 15$ corta os eixo x no ponto (5, 0).

2) Determinar o zero da função y = 4x - 1.

Solução:

Fazendo y = 0, temos: $4x - 1 = 0$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Nota: A reta y = 4x - 1 corta os eixo x no ponto ($\frac{1}{4}$, 0).

Exercícios:

1) Determine os zeros das seguintes funções do 1º grau:

a) $y = x + 7$

b) $y = -5x + 5$

c) $y = -\frac{x}{2} + 3$

d) $y = -3x + 6$

e) $y = -3x + 2$

f) $y = 2 - \frac{x}{2}$

1) Determine as coordenadas do ponto de interseção do eixo x com as seguintes retas:

a) $y = x - 3$

b) $y = x + 7$

c) $y = 3x - 4$

d) $y = -4x - 8$

e) $y = -2x - 6$

f) $y = 2 - 2x$

Condição para um ponto pertencer a uma reta

Um ponto P (x, y) pertence a uma reta se as suas coordenadas satisfazem à equação da reta dada.

Exemplo:

Verifique quais dos pontos abaixo pertencem à reta y = 3x -1.

a) A (2, 5)

b) B (3, 7)

Solução:

a) Substituirmos, na equação, x por 2 e y por 5 e verificamos se a sentença obtida é verdadeira ou falsa.

y = 3x -1

5 = 3 . 2 - 1

5 = 6 - 1

5 = 5 (verdadeira)

Logo, o ponto A (2, 5) pertence à reta.

b) Substituindo, na equação, x por 3 e y por 7, vem:

y = 3x -1

7 = 3 . 3 - 1

7 = 9 - 1

7 = 8 (falsa)

Logo, o ponto B (3, 7) **não** pertence à reta.

Exercícios:

1) Verifique quais dos pontos abaixo pertencem à reta da equação y = x + 3:

a) A (7, 3) b) B (5, 2) c) C (0, 4) d) E (-5, -2)

2) Verifique quais dos pontos abaixo pertencem à reta da equação y = 2x - 1:

a) A (1, 1) b) B (2, 3) c) C (-1, 1) d) E (-2, 5)

3) Verifique se o ponto:

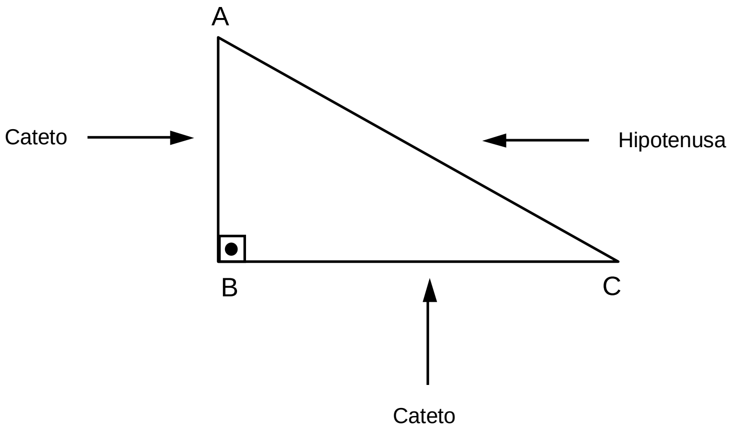
a) E (4, 7) pertence à reta y = 1 - 2x
b) F (-1, 0) pertence à reta y = -4x + 5
c) G (-2, -3) pertence à reta y = x - 1

Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Preliminares

Vamos recordar:

O ***triângulo retângulo*** é aquele que tem um ângulo reto.

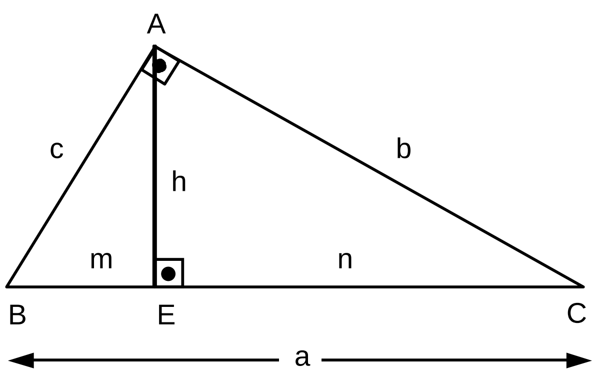


Observe que:

- Os lados que formam o ângulo reto são chamados ***catetos***.
- O lado oposto ao ângulo reto é chamado ***hipotenusa***.

Elementos de um triângulo retângulo

Seja o triângulo retângulo ABC:



Os elementos do triângulo dado são:

a $\rightarrow$ medida da hipotenusa $\overline{BC}$

b $\rightarrow$ medida do cateto $\overline{AC}$

c $\rightarrow$ medida do cateto $\overline{AB}$

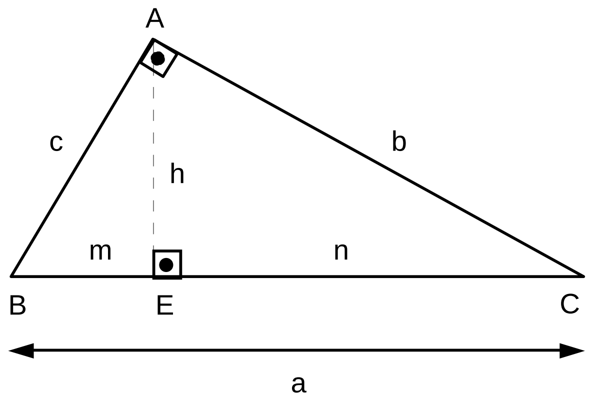
h $\rightarrow$ medida da altura $\overline{AE}$

m $\rightarrow$ medida da projeção de $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa

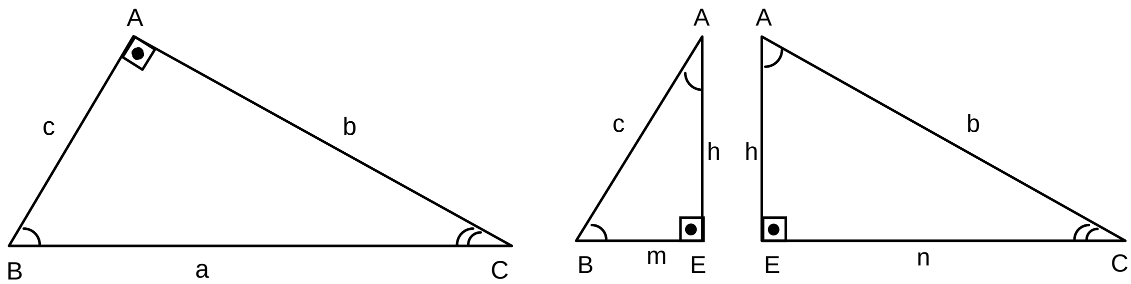
n $\rightarrow$ medida da projeção de $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa

Relações métricas

Seja o triângulo retângulo:



Trançando a altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC, obtemos dois outros triângulos retângulos.



Os triângulos ABC, EBA e EAC são semelhantes (têm dois ângulos congruentes). Então, podemos enunciar as relações que seguem.

1ª RELAÇÃO

A medida de cada cateto é a média proporcional entre as medidas da hipotenusa e da projeção deste cateto.

Sejam as semelhanças:

$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ EBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow \boxed{c^2 = a\ .\ m}$$

$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ EAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow \boxed{b^2 = a\ .\ n}$$

2ª RELAÇÃO

A medida da altura à hipotenusa é a média proporcional entre as medidas das projeções dos catetos.

Sejam os triângulos:

$$\Delta\ EBA \sim \Delta\ EAC \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = m\ .\ n}$$

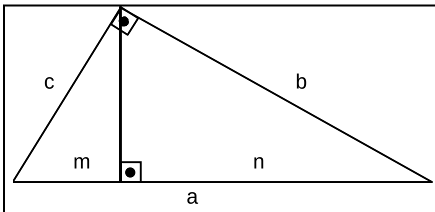
3ª RELAÇÃO

O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa a essa hipotenusa.

Sejam os triângulos:

$$\Delta\ ABC \sim \Delta\ EBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow \boxed{b\ .\ c = a\ .\ h}$$

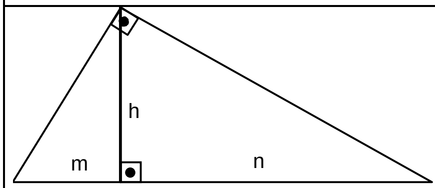
RESUMO



1) $c^2 = a \cdot m$

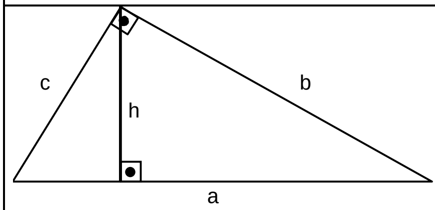
2) $b^2 = a \cdot n$

(cateto)2 = (hipotenusa) . (projeção)



3) $h^2 = m \cdot n$

(altura)2 = (projeção) . (projeção)



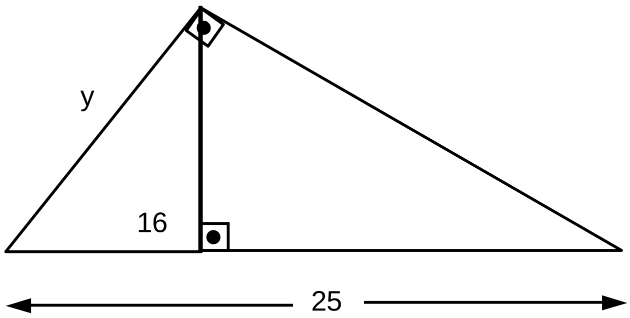
4) $b \cdot c = a \cdot h$

(cateto) . (cateto) = (hipotenusa) . (altura)

Exercícios resolvidos

Calcular o valor de y, nos triângulos retângulos:

a)



Solução:

Aplicando ***1*** , resulta:

$y^2 = 25 \cdot 16$

$y^2 = 400$

$y = \sqrt{400}$

$y = 20$

b)

Solução:

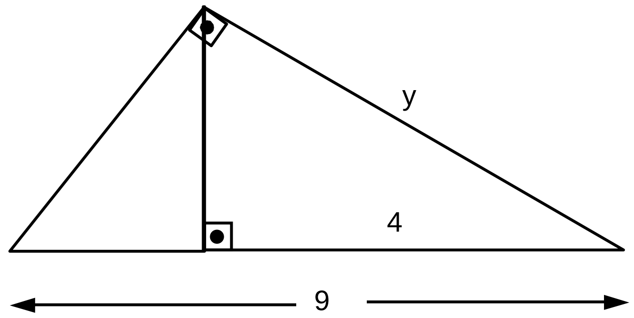
Aplicando ***2*** , resulta:

$y^2 = 9 \cdot 4$

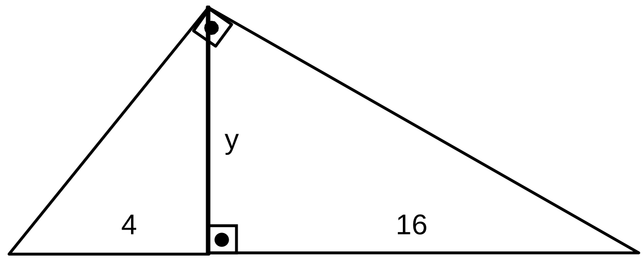
$y^2 = 36$

$y = \sqrt{36}$

$y = 6$



c)



Solução:

Aplicando ***3*** , resulta:

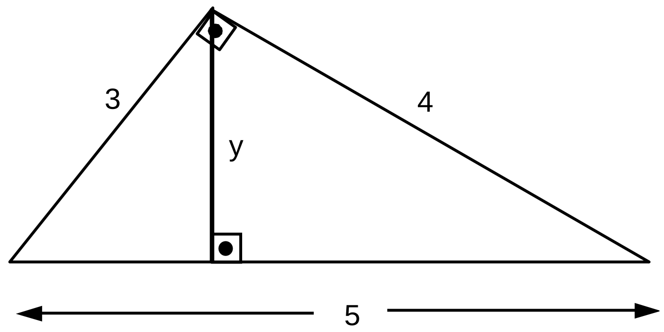
$y^2 = 4 \,.\, 16$

$y^2 = 64$

$y = \sqrt{64}$

$y = 8$

d)



Solução:

Aplicando ***4*** , resulta:

$5 \,.\, y = 3 \,.\, 4$

$5y = 12$

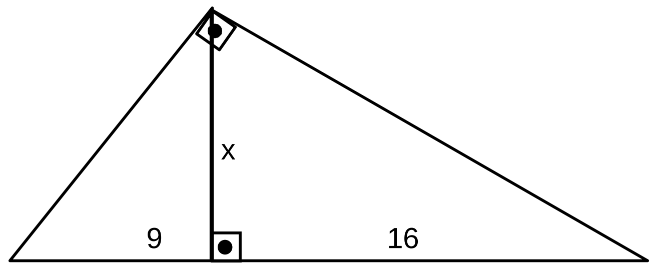
$y = \dfrac{12}{5}$

$y = 2{,}4$

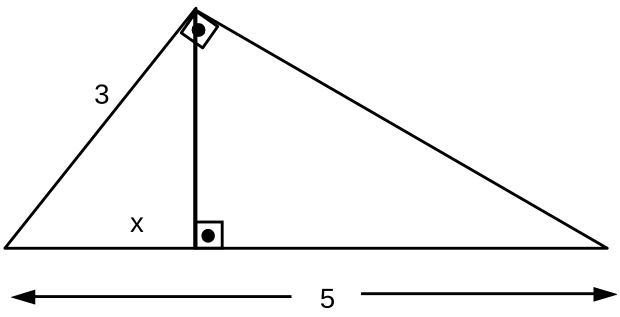
Exercícios:

1) Calcule o valor de **x** nos triângulos retângulos:

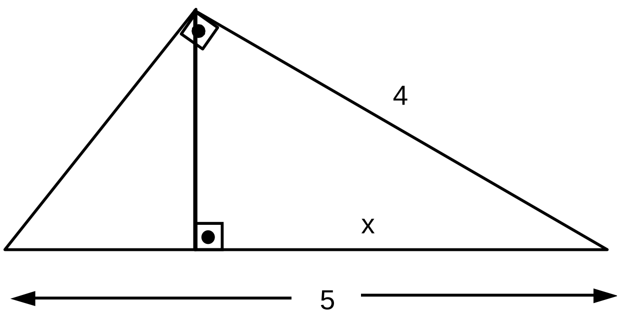
a)



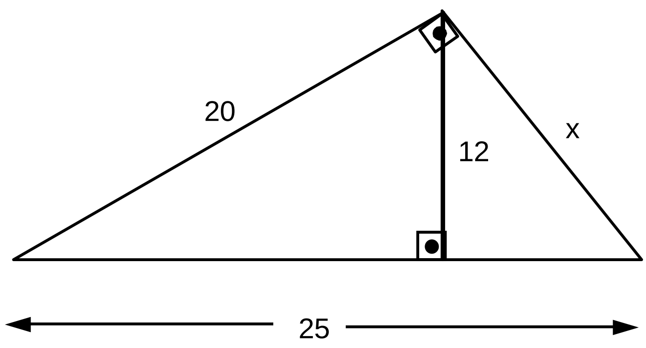
b)



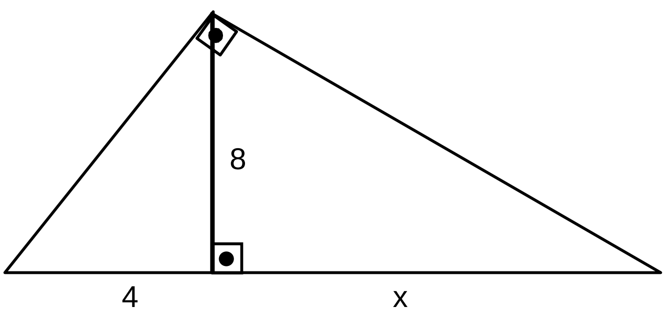
c)



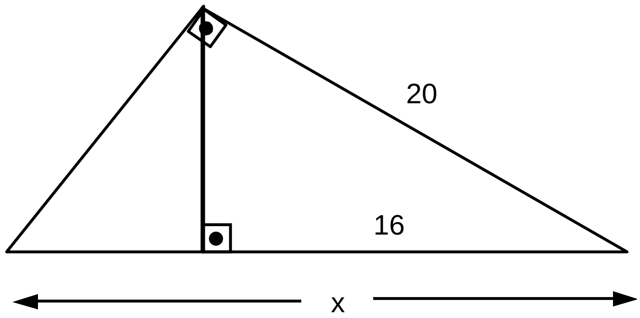
d)



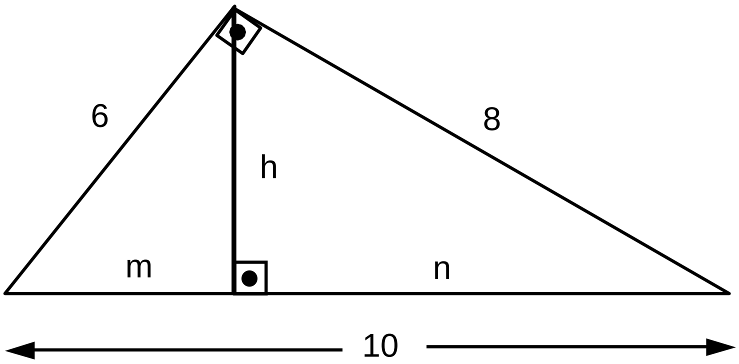
e)



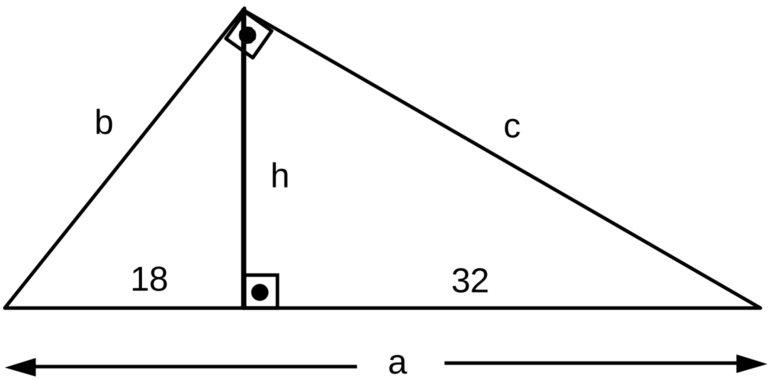
f)



2) Calcule **h**, **m** e **n** no triângulo retângulo:

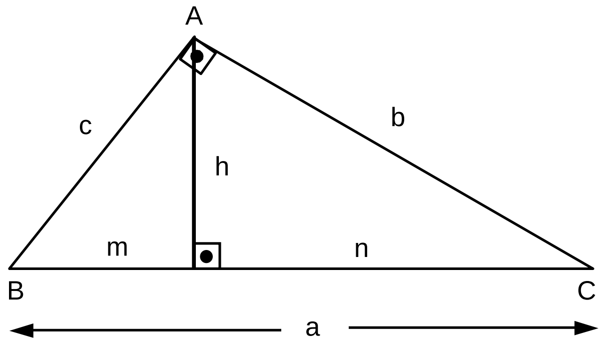


3) Calcule **a**, **b**, **c** e **h** no triângulo retângulo:



4ª Relação - Teorema de Pitágoras

O quadrado da media da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



Pela relação ***1***, temos:

$$b^2 = a \cdot n$$
$$\underline{c^2 = a \cdot m \qquad +}$$
$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$$
$$b^2 + c^2 = a\,(n + m)$$
$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$

- Somando membro a membro.
- Fatorando o 2º membro.
- Observando que n + m = a.

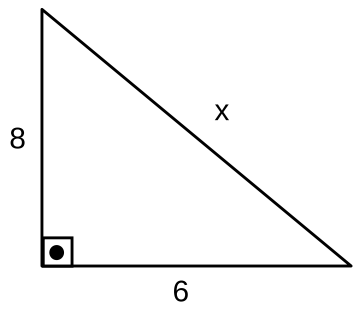
ou

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Exercícios:

1) Calcular o valor de **x** nos seguintes triângulos retângulos:

a)



Solução:

Pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 6^2 + 8^2$

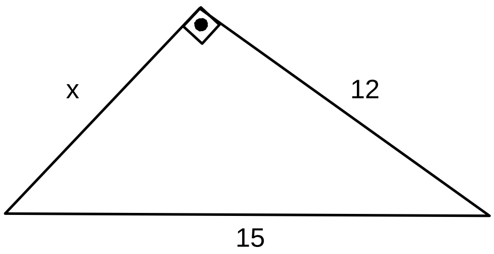
$x^2 = 36 + 64$

$x^2 = 100$

$x = \sqrt{100}$

$x = 10$

b)



Solução:

Pelo teorema de Pitágoras:

$15^2 = x^2 + 12^2$

$225^2 = x^2 + 144$

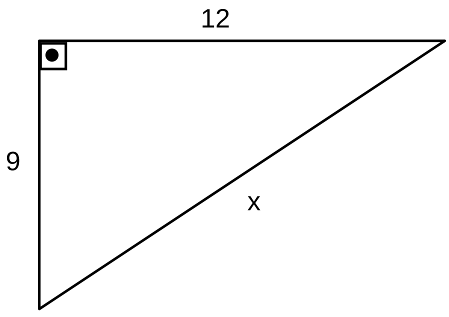
$x^2 = 81$

$x = \sqrt{81}$

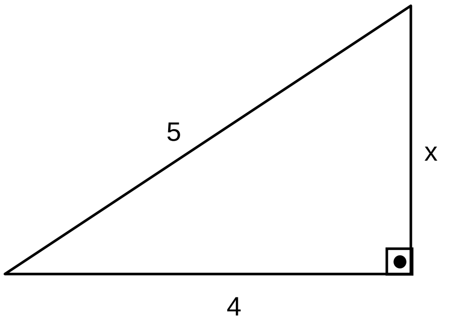
$x = 9$

2) Calcule **x** nas figuras abaixo:

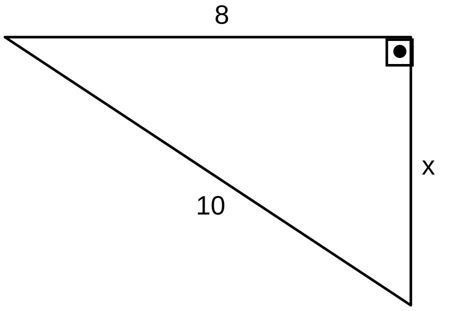
a)



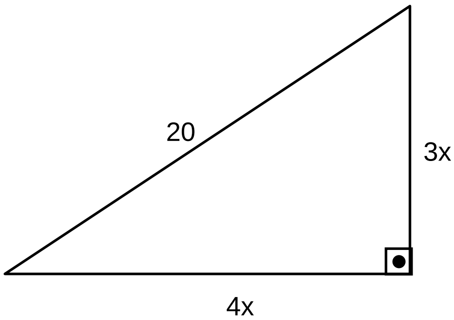
b)



c)

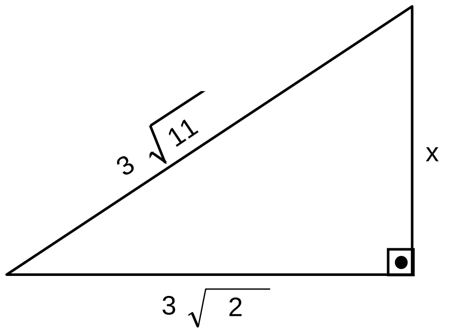


d)

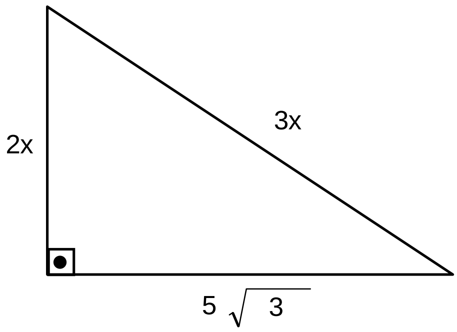


3) Calcule **x** nas figuras abaixo:

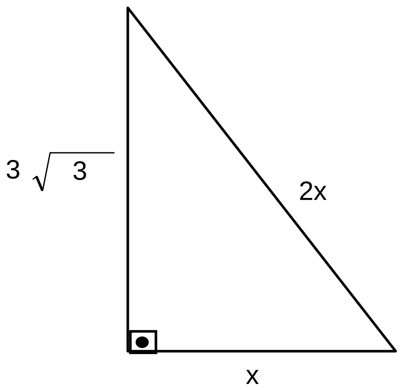
a)



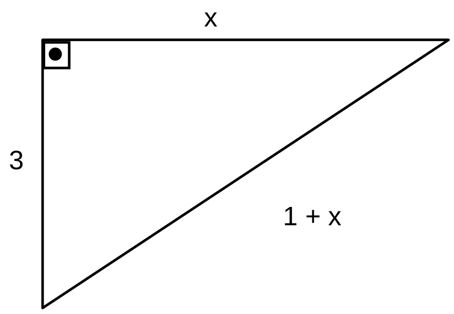
b)



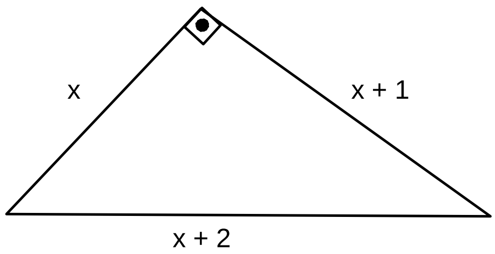
c)



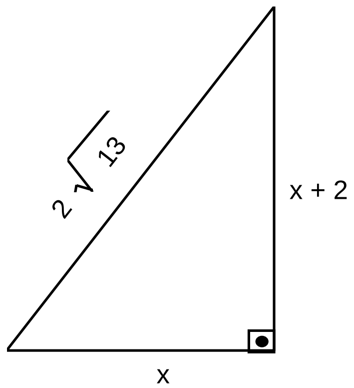
d)



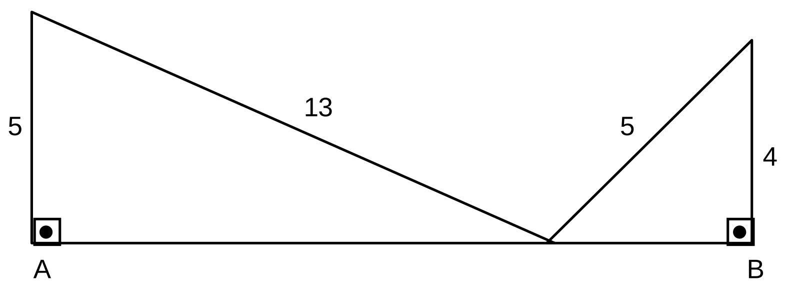
e)



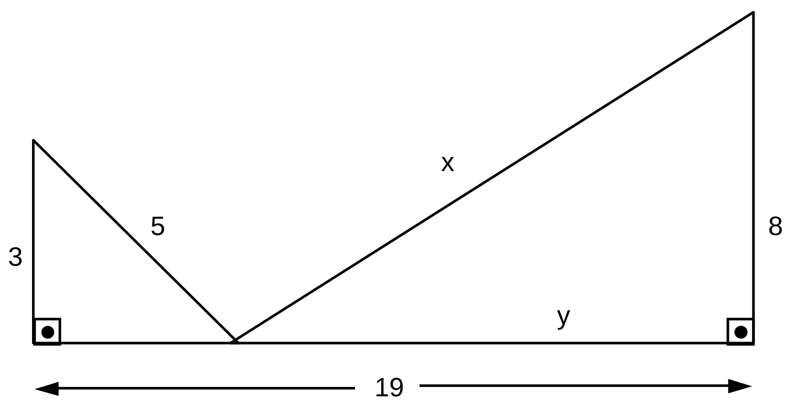
f)



4) Na figura, calcule a distância de A a B.

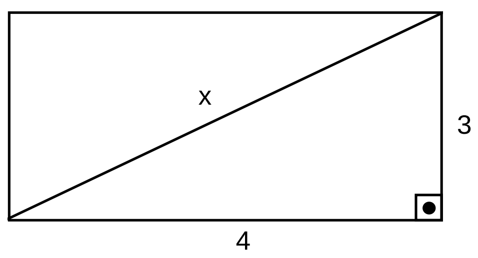


5) Calcule **x** e **y**:

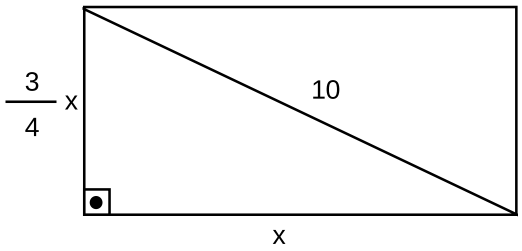


6) Utilizando o teorema de Pitágoras, calcule **x**:

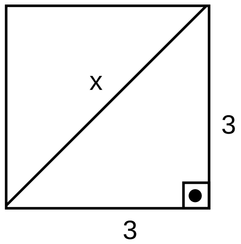
a)



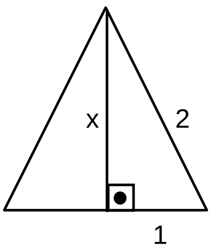
b)



c)

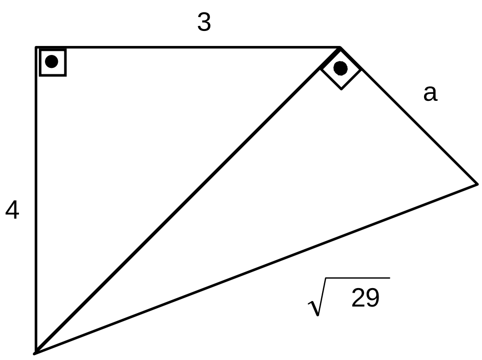


d)

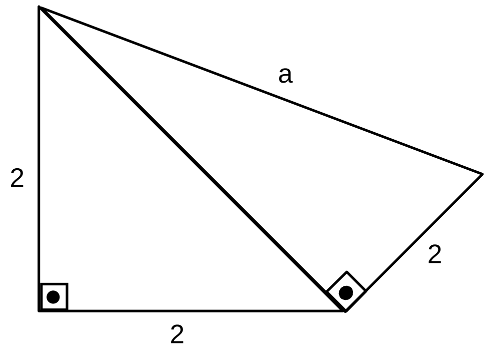


7) Calcule **a** nas figuras abaixo:

a)

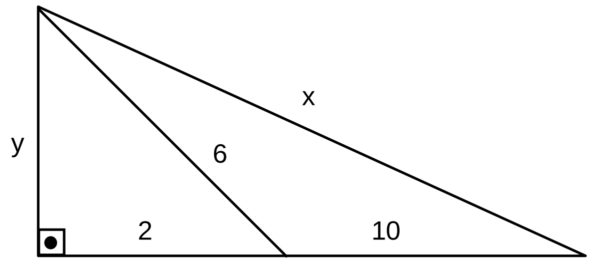


b)

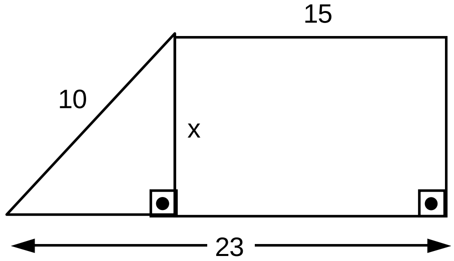


8) Calcule **x**:

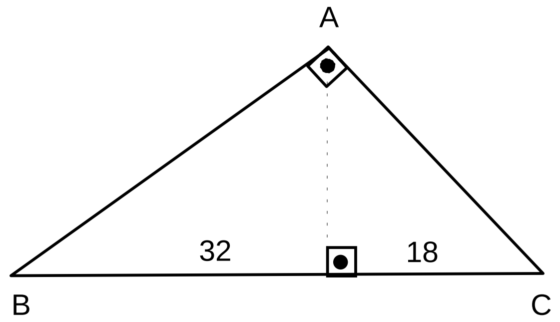
a)



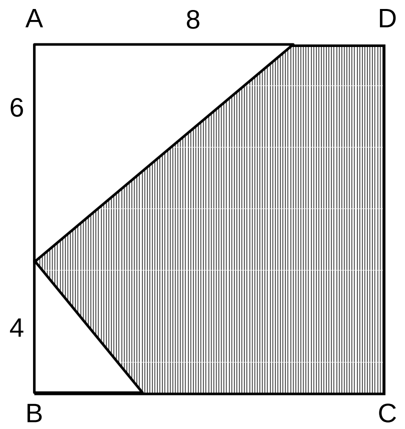
b)



9) Qual é o perímetro do triângulo retângulo da figura ?



10) Qual é o perímetro do triângulo retângulo da figura ?



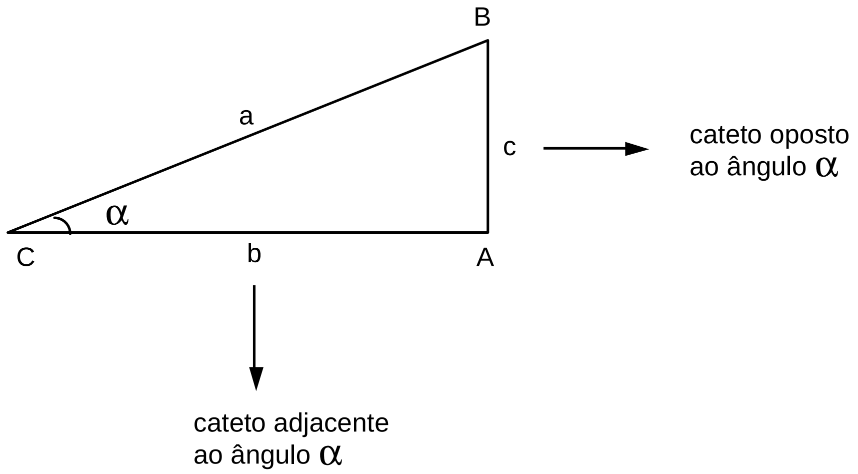
Razões trigonométricas

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

No triângulo retângulo definem-se:

- seno de um ângulo agudo = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$
- cosseno de um ângulo agudo = $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$
- tangente de um ângulo agudo = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$

Para o triângulo retângulo ABC:

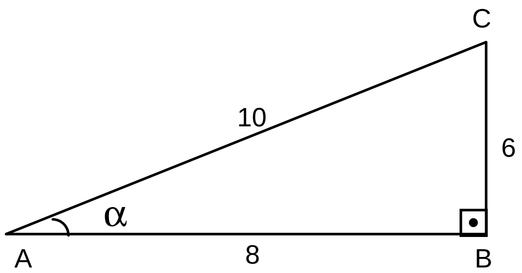


temos que:

seno $\alpha = \dfrac{c}{a}$ cons $\alpha = \dfrac{b}{a}$ tg $\alpha = \dfrac{c}{b}$

Exercícios:

1) Calcular o seno, o cosseno e a tangente do ângulo α.



Solução:

seno $\alpha = \dfrac{6}{10} = 0,8$

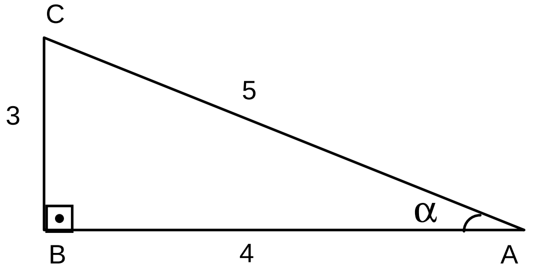
cons $\alpha = \dfrac{8}{10} = 0,8$

tg $\alpha = \dfrac{6}{8} = 0,75$

Observações:

- O seno e o cosseno são sempre números reais menores que 1, pois qualquer cateto é sempre menor que a hipotenusa.
- A tangente é um número real positivo.

2) No triângulo retângulo da figura, calcule:

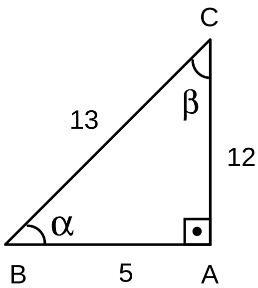


a) seno α

b) cons α

c) tg α

3) No triângulo retângulo da figura, calcule:

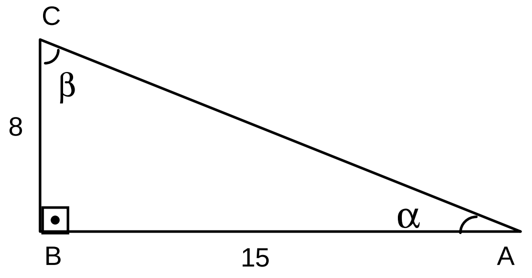


a) seno α a) seno β

b) cons α b) cons β

c) tg α c) tg β

4) No triângulo retângulo da figura, calcule:



a) seno α a) seno β

b) cons α b) cons β

c) tg α c) tg β

Tabela de Razões Trigonométricas

Os valores aproximados dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos de 1º a 89º são encontrados na tabela da página seguinte.

Uso da Tabela

Com a tabela podemos resolver dois tipos de problemas:

- *Dado o ângulo, determinar a razão trigonométrica.*

Exemplos:

1) Calcule sen 15º.
Na coluna ângulo, procuramos 15º.
Na coluna seno, achamos 0,2588.
Assim: seno 15º = 0,2588.

2) Calcule tg 50º.
Na coluna ângulo, procuramos 50º.
Na coluna tangente, achamos 1,1918.
Assim: tg 50º = 1,1918.

- *Dada a razão trigonométrica, determinar o ângulo.*

Exemplo:
Calcule o ângulo x, sendo cos x = 0,4226.
Na coluna cosseno, procuramos 0,4226.
Na coluna ângulo, achamos 65º.
Assim: x = 65º

TABELA DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE 1º A 89º

Ângulo	*Seno*	*Cosseno*	*Tangente*	*Ângulo*	*Seno*	*Cosseno*	*Tangente*
1º	0,0175	0,9998	0,0175	46º	0,7193	0,6947	1,0355
2º	0,0349	0,9994	0,0349	47º	0,7314	0,6820	1,0724
3º	0,0523	0,9986	0,0524	48º	0,7431	0,6691	1,1106
4º	0,0698	0,9976	0,0699	49º	0,7547	0,6561	1,1504
5º	0,0872	0,9962	0,0875	50º	0,7660	0,6428	1,1918
6º	0,1045	0,9945	0,1051	51º	0,7771	0,6293	1,2349
7º	0,1219	0,9925	0,1228	52º	0,7880	0,6157	1,2799
8º	0,1392	0,9903	0,1405	53º	0,7986	0,6018	1,3270
9º	0,1564	0,9877	0,1584	54º	0,8090	0,5878	1,3764
10º	0,1736	0,9848	0,1763	55º	0,8192	0,5736	1,4281
11º	0,1908	0,9816	0,1944	56º	0,8290	0,5592	1,4826
12º	0,2097	0,9781	0,2126	57º	0,8387	0,5446	1,5399
13º	0,2250	0,9744	0,2309	58º	0,8480	0,5299	1,6003
14º	0,2419	0,9703	0,2493	59º	0,8572	0,5150	1,6643
15º	0,2588	0,9659	0,2679	60º	0,8660	0,5000	1,7321
16º	0,2756	0,9613	0,2867	61º	0,8746	0,4848	1,8040
17º	0,2924	0,9563	0,3057	62º	0,8829	0,4695	1,8807
18º	0,3090	0,9511	0,3249	63º	0,8910	0,4540	1,9626
19º	0,3256	0,9455	0,3443	64º	0,8988	0,4384	2,0503
20º	0,3420	0,9397	0,3640	65º	0,9063	0,4226	2,1445
21º	0,3584	0,9336	0,3839	66º	0,9135	0,4067	2,2460
22º	0,3746	0,9272	0,4040	67º	0,9205	0,3907	2,3559
23º	0,3907	0,9205	0,4245	68º	0,9272	0,3746	2,4751
24º	0,4067	0,9135	0,4452	69º	0,9336	0,3584	2,6051
25º	0,4226	0,9063	0,4663	70º	0,9397	0,3420	2,7475
26º	0,4384	0,8988	0,4877	71º	0,9455	0,3256	2,9042
27º	0,4540	0,8910	0,5095	72º	0,9511	0,3090	3,0777
28º	0,4695	0,8829	0,5317	73º	0,9563	0,2824	3,2709
29º	0,4848	0,8746	0,5543	74º	0,9613	0,2756	3,4874
30º	0,5000	0,8660	0,5774	75º	0,9659	0,2588	3,7321
31º	0,5150	0,8572	0,6009	76º	0,9703	0,2419	4,0108
32º	0,5299	0,8480	0,6249	77º	0,9744	0,2250	4,3315
33º	0,5446	0,8387	0,6494	78º	0,9781	0,2079	4,7046
34º	0,5592	0,8290	0,6745	79º	0,9816	0,1908	5,1446
35º	0,5736	0,8192	0,7002	80º	0,9848	0,1736	5,6713
36º	0,5878	0,8090	0,7265	81º	0,9877	0,1564	6,3188
37º	0,6018	0,7986	0,7536	82º	0,9903	0,1392	7,1154
38º	0,6157	0,7880	0,7813	83º	0,9925	0,1219	8,1443
39º	0,6293	0,7771	0,8098	84º	0,9945	0,1045	9,5144
40º	0,6428	0,7660	0,8391	85º	0,9962	0,0872	11,4301
41º	0,6561	0,7547	0,8693	86º	0,9976	0,0698	14,3007
42º	0,6691	0,7431	0,9004	87º	0,9986	0,0523	19,0811
43º	0,6820	0,7314	0,9325	88º	0,9994	0,0349	28,6363
44º	0,6947	0,7193	0,9657	89º	0,9998	0,0175	57,2900

45º	0,7071	0,7071	1,000				

Exercícios:

1) Consulte a tabela e encontre o valor de:

a) cos 18º
b) sen 18º
c) tg 18º
d) sen 20º
e) tg 39º
f) cos 41º
g) sen 42º
h) tg 60º
i) cos 54º
j) sen 68º
k) cos 75º
l) tg 80º

2) Consulte a tabela e responda:

a) Qual é o ângulo cujo cosseno vale 0,2756 ?

b) Qual é o ângulo cujo seno vale 0,2588 ?

c) Qual é o ângulo cuja tangente vale 0,6494 ?

3) Consulte a tabela e determine o ângulo x:

a) seno x = 0,2419
b) cos x = 0,9063
c) tg x = 0,7002
d) cos x = 0,4695
e) tg x = 1,2349
f) sen x = 0,9511

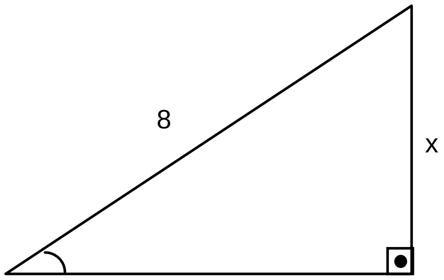
Ângulos Notáveis

As razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º aparecem frequentemente nos problemas. Por isso, vamos apresentar essas razões na forma fracionária.

	30º	45º	60º
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios:

1) Calcular o valor de **x** no triângulo retângulo da figura abaixo.



Solução:

seno 30º = $\frac{x}{8}$

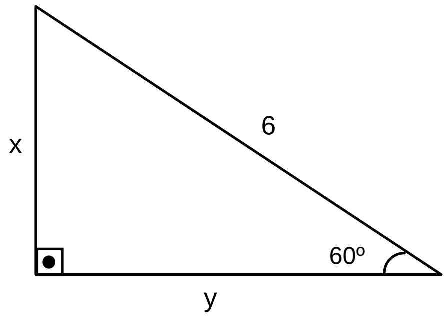
$\frac{1}{2} = \frac{x}{8}$

2x = 8

x = 4

Resposta: 4

2) Calcular os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6cm e um dos ângulos mede 60º.



Solução:

a) seno 60º = $\frac{x}{6}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{6}$

$2x = 6\sqrt{3}$

$x = \frac{6\sqrt{3}}{2}$

$x = 3\sqrt{3}$

b) cos 60º = $\frac{y}{6}$

$\frac{1}{2} = \frac{y}{6}$

$2y = 6$

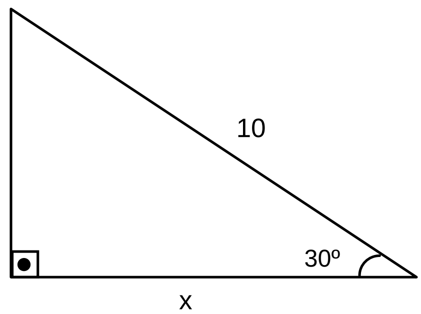
$y = \frac{6}{2}$

$y = 3$

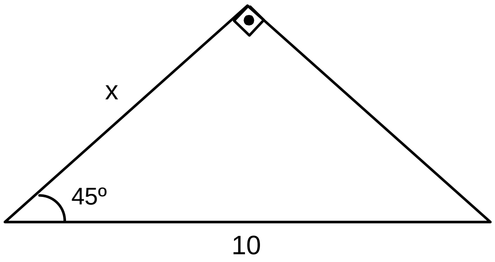
Resposta: $x = 3\sqrt{3}$ cm e $y = 3$ cm

3) Calcule o valor de **x** em cada um dos triângulos:

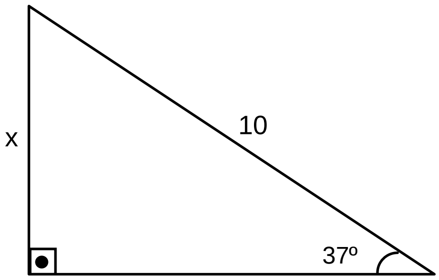
a)



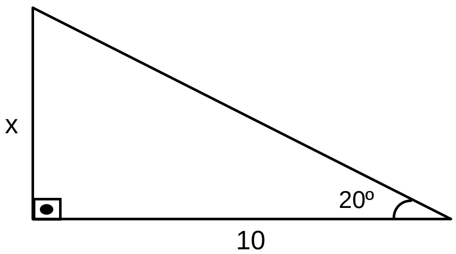
b)



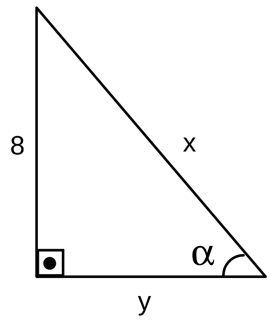
c)



d)



4) Na figura, sen $\alpha = \frac{4}{5}$. Calcule x e y.



Solução:

a) Cálculo de x:

seno $\alpha = \frac{8}{x}$

$\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$

$4x = 40$

$x = 10$

b) Cálculo de y:

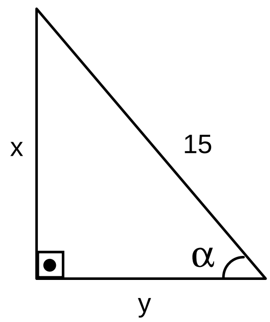
$y^2 + 8^2 = 10^2$

$y^2 + 64 = 100$

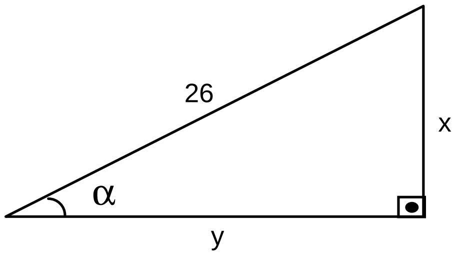
$y^2 = 36$

$y = 6$

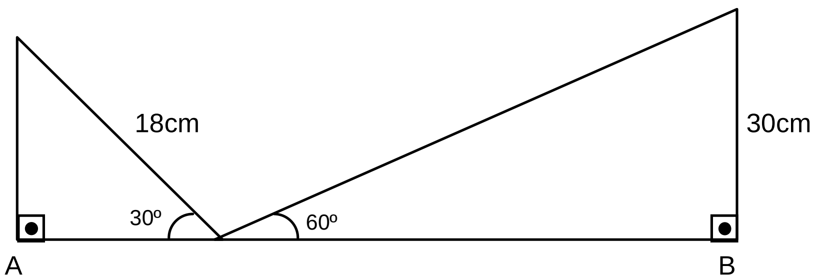
5) Na figura, cos $\alpha = \frac{3}{5}$. Calcule x e y.



6) Na figura, tg $\alpha = \frac{5}{12}$. Calcule x e y.



7) Na figura, calcule a distância de A a B.



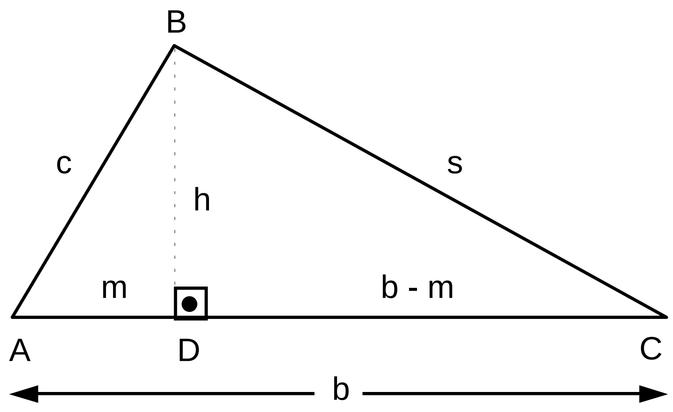
Relações Métricas num Triângulo qualquer

Teorema - Lado oposto a ângulo agudo

O quadrado da medida do lado oposto a um ângulo ***agudo*** é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto da medida de um desses lados pela medida da projeção o outro sobre ele.

H { $\hat{A}$ é agudo

T { $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm$



Demonstração:

No Δ BCD: $a^2 = h^2 + (b - m)^2$ (Pitágoras)

$a^2 = h^2 + b^2 - 2\,bm + m^2$ (***1***)

No Δ BAD: $h^2 = c^2 - m^2$ (***2***) (Pitágoras)

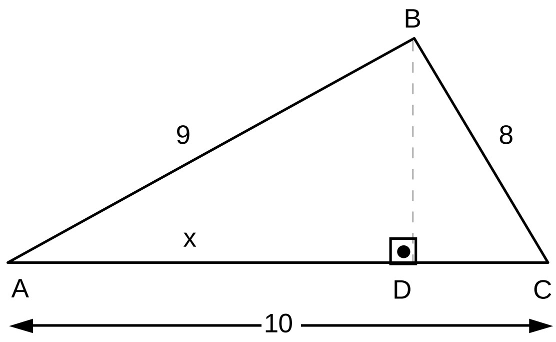
Substituindo (***2***) em (***1***), resulta:

$a^2 = c^2 - m^2 + b^2 - 2\,bm + m^2$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm}$

Exercícios:

1) Na figura abaixo, calcular o valor de **x**.



Solução:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bm}$$

$$8^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \cdot 10 \cdot x$$

$$64 = 100 + 81 - 20x$$

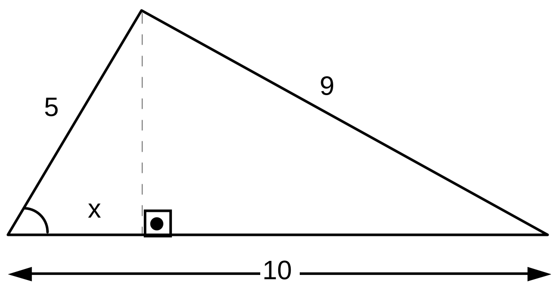
$$20x = 181 - 64$$

$$20x = 117$$

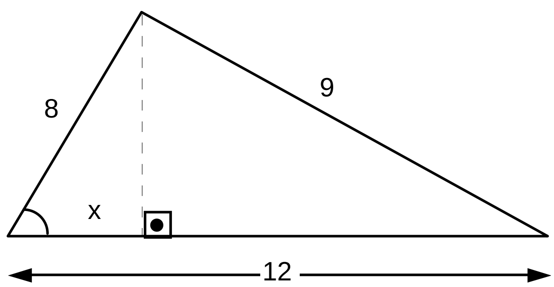
$$x = \frac{117}{20} = 5{,}85$$

2) Nas figuras abaixo, calcule **x**:

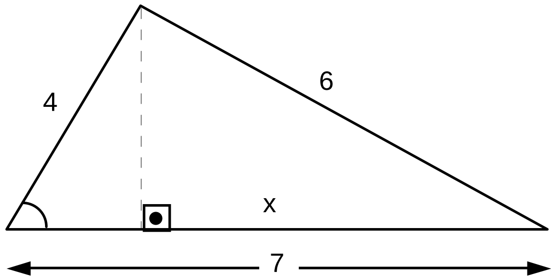
a)



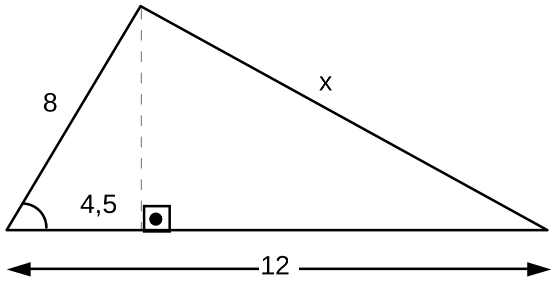
b)



c)



d)

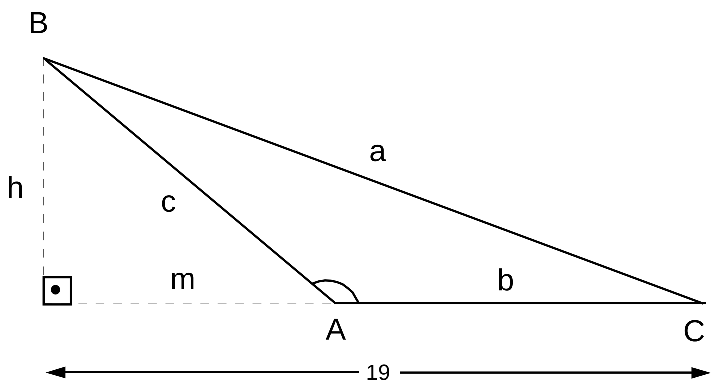


Teorema - Lado oposto a ângulo obtuso

O quadrado da medida do lado ao ângulo ***obtuso*** é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, mais duas vezes o produto da medida de um desses lados pela medida da projeção do outro sobre ele.

H { $\hat{A}$ é obtuso

T { $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm$



Demonstração:

No Δ BCD: $a^2 = h^2 + (b + m)^2$ (Pitágoras)

$a^2 = h^2 + b^2 + 2\,bm + b^2$ (***1***)

No Δ BDA: $h^2 = c^2 - m^2$ (***2***) (Pitágoras)

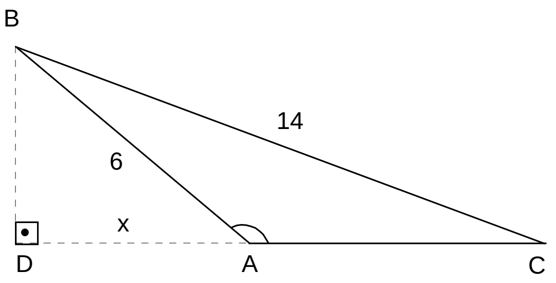
Substituindo (***2***) em (***1***), resulta:

$$a^2 = c^2 - \cancel{m^2} + \cancel{m^2} - 2\,bm + m^2$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm}$$

Exercícios:

1) Na figura abaixo, calcular o valor de **x**.



Solução:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bm}$$

$14^2 = 10^2 + 6^2 + 2 \,.\, 10 \,.\, x$

$196 = 100 + 36 + 20x$

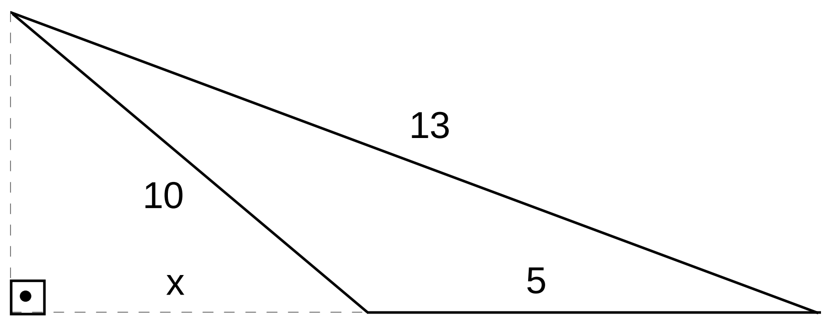
$196 = 136 + 64$

$20x = 60$

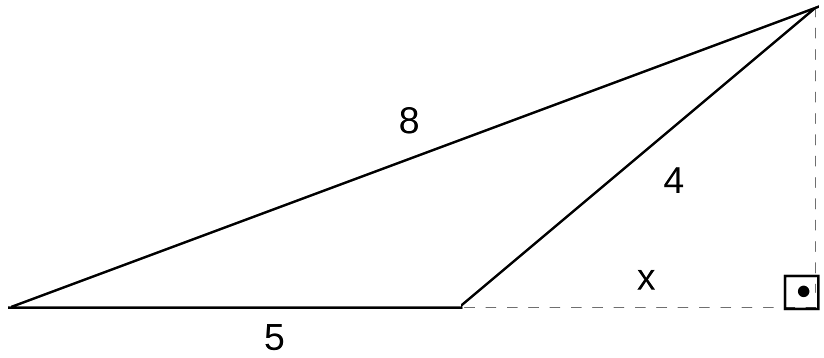
$x = 3$

2) Nas figuras abaixo, calcule **x**:

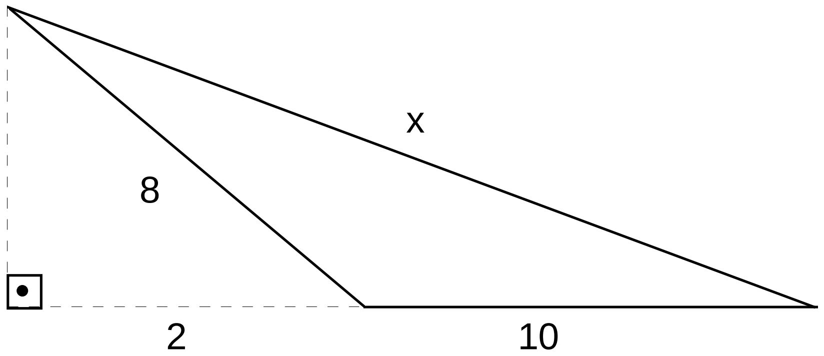
a)



b)



c)



Natureza de um triângulo

Podemos estabelecer o seguinte critério para classificar triângulos quanto aos ângulos:

Sendo **a** a medida do maior lado, temos:

1	$a^2 = b^2 + c^2$	$\Rightarrow$	Δ retângulo
2	$a^2 < b^2 + c^2$	$\Rightarrow$	Δ acutângulo
3	$a^2 > b^2 + c^2$	$\Rightarrow$	Δ obtusângulo

Exemplos:

(1) Um triângulo cujos lados medem 3cm, 4cm e 5cm é ***retângulo***.

Justificando: $5^2 = 3^2 + 4^2$
$25 = 9 + 16$
$25 = 25$

(2) Um triângulo cujos lados medem 4cm, 5cm e 6cm é ***acutângulo***.

Justificando: $6^2 < 4^2 + 5^2$
$36 < 16 + 25$
$36 < 41$

(3) Um triângulo cujos lados medem 4cm, 2cm e 5cm é ***obtusângulo***.

Justificando: $5^2 > 4^2 + 2^2$
$25 > 16 + 4$
$25 > 20$

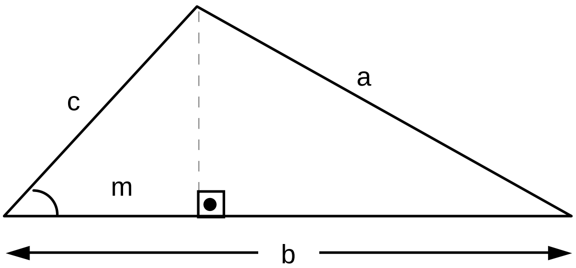
Exercícios:

1) Classificar quanto aos ângulos cujos lados medem:

a) 5cm, 8cm e 7cm
b) 3cm, 7cm e 5cm
c) 15cm, 9cm e 12cm
g) 12cm, 8cm e 9cm
h) 8cm, 15cm e 17cm
i) 7cm, 10cm 4cm

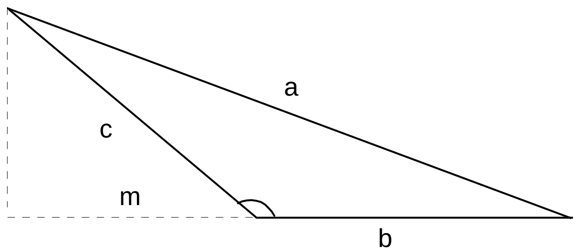
Resumo

(***1***) Lado oposto a ângulo ***agudo***



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bm$$

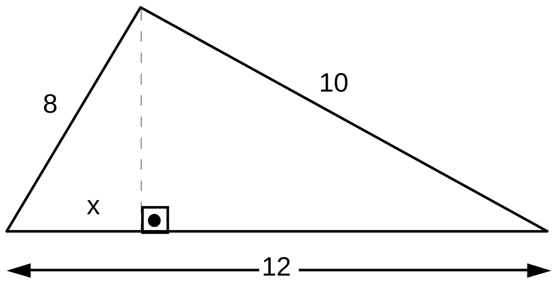
(***2***) Lado oposto a ângulo ***obtuso***



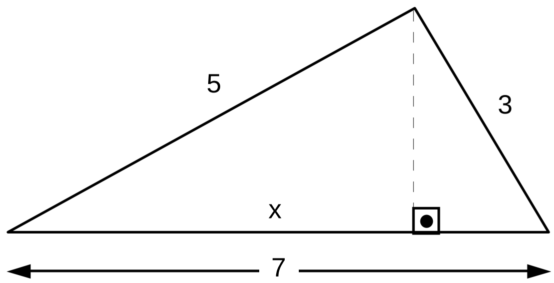
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bm$$

2) Nas figuras abaixo, calcule **x**:

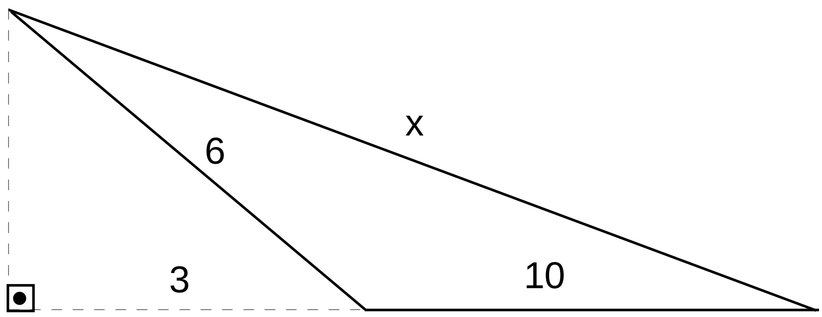
a)



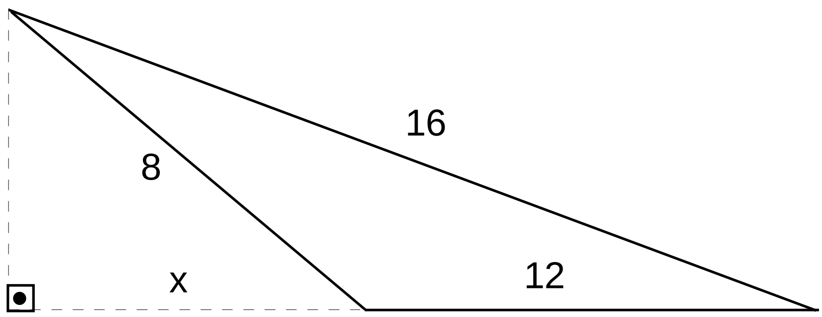
b)



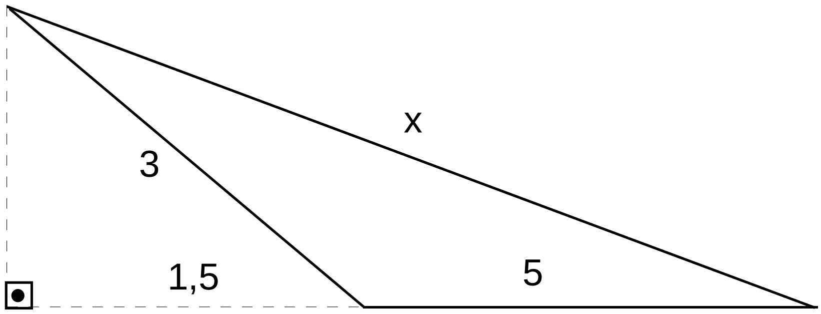
c)



d)



e)


x
3
1,5
5

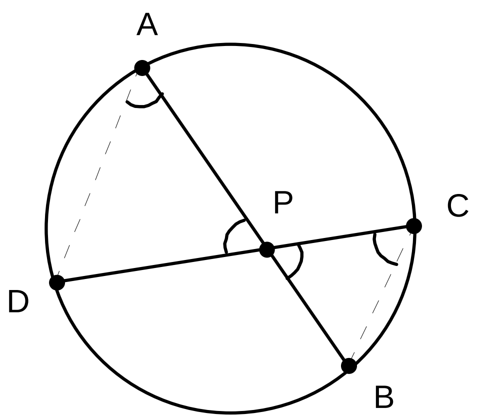
Relações métricas na Circunferência

Teorema

Se duas cordas se cortam em um ponto interior da circunferência, então o produto das medidas dos segmentos determinados numa delas é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados na outra.

H $\left[\begin{array}{l} \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{ P \} \\ \\ P \text{ é interior} \end{array}\right.$

T $\left[\; PA \cdot PB = PC \cdot PD \right.$



Demonstração:

Considerando os triângulos PAD e PCB:

$\hat{P} \cong \hat{P}$ (oposto pelo vértice)

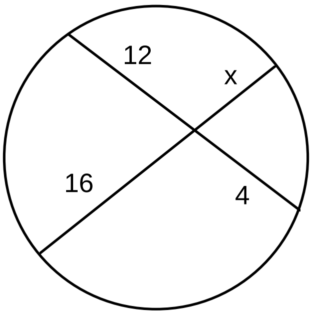
$\hat{A} \cong \hat{C}$ (ângulos inscritos de mesmo arco)

Logo, Δ PAD ~ Δ PCB.

Então: $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB} \Rightarrow \boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$

Exercícios:

1) Calcular o valor de **x** na figura:



Solução:

$$16 \ . \ x = 12 \ . \ 4$$

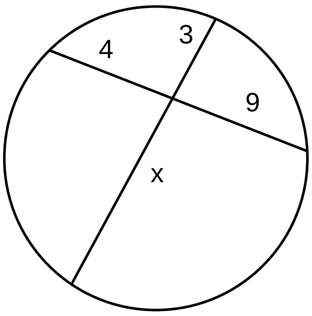
$$16x = 48$$

$$x = \frac{48}{16}$$

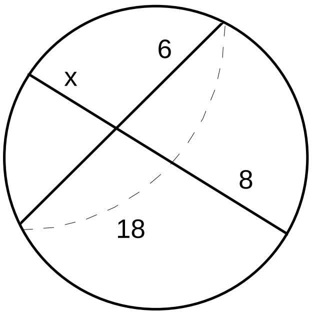
$$x = 3$$

2) Calcule o valor de **x** nas seguintes figuras:

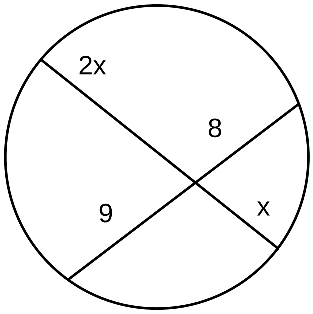
a)



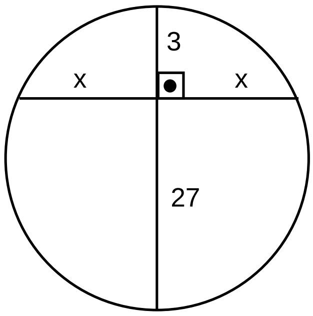
b)



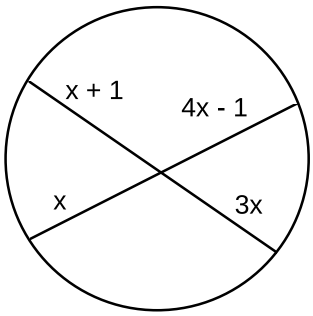
c)



d)



e)

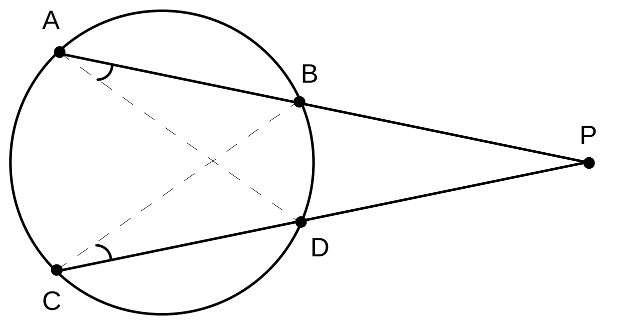


Teorema

Se de um ponto P que pertence ao exterior de uma circunferência traçamos duas secantes que cortam a circunferência, respectivamente, no pontos A, B e C, D, então: PA . PB = PC . PD

H $\left[\begin{array}{l} \overline{PA} \text{ e } \overline{PC} \text{ são secantes} \\ \\ \text{P é exterior} \end{array}\right.$

T $\left[\ \text{PA . PB = PC . PD}\right.$



Demonstração:

Considerando os triângulos PAD e PCB:

$\hat{P} \cong \hat{P}$ (ângulo comum)

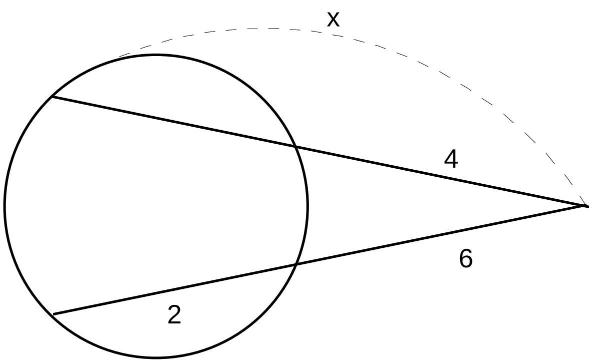
$\hat{A} \cong \hat{C}$ (ângulos inscritos de mesmo arco)

Logo, Δ PAD ~ Δ PCB.

Então: $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB} \Rightarrow \boxed{PA \;.\; PB = PC \;.\; PD}$

Exercícios:

1) Calcular o valor de **x** na figura:



Solução:

$x \cdot 4 = (2 + 6) \cdot 6$

$4x = 8 \cdot 6$

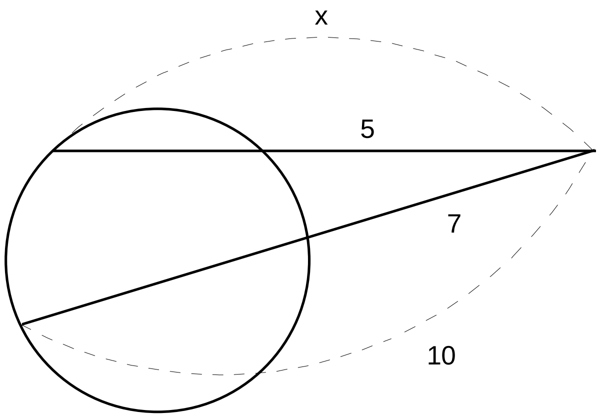
$4x = 48$

$x = \dfrac{48}{4}$

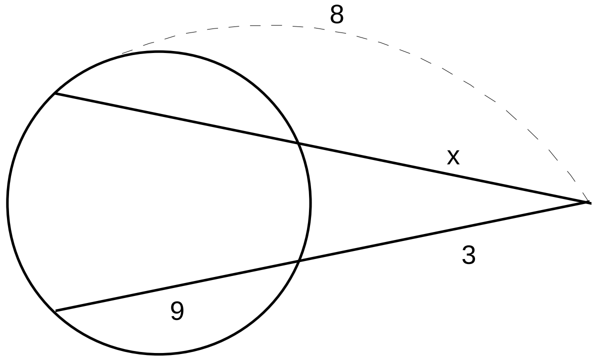
$x = 12$

2) Calcule o valor de **x** nas seguintes figuras:

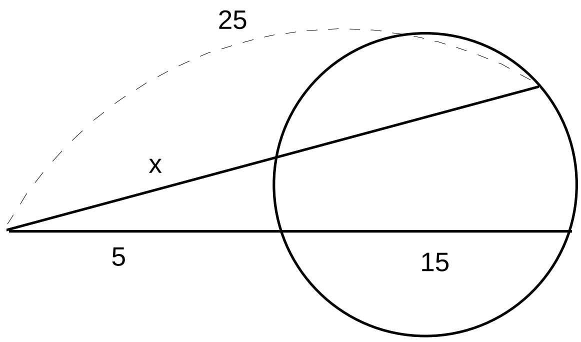
a)



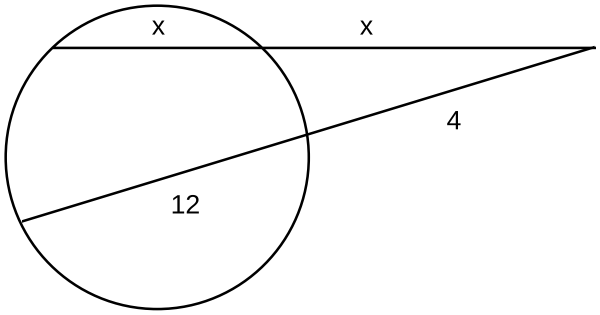
b)


8
x
3
9

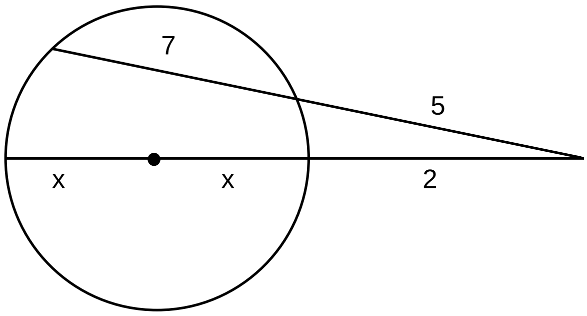
c)



d)



e)

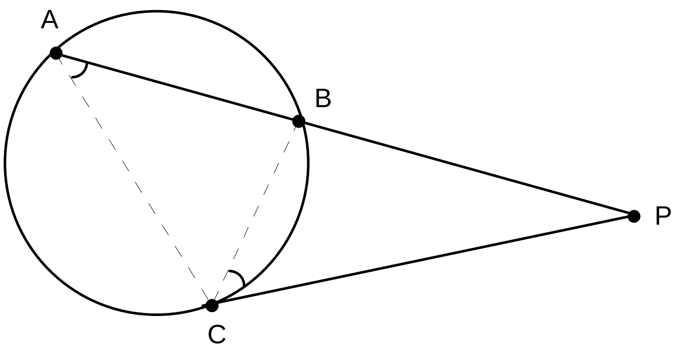


Teorema

Se de um ponto P que pertence ao exterior de uma circunferência, traçamos uma tangente e uma secante que encontram a circunferência, respectivamente, nos pontos C e A e B, então $(PC^2) = PA \cdot PB$

$$H \left[\begin{array}{ll} P & \text{é exterior} \\ \overline{PC} & \text{é tangente} \\ \overline{PA} & \text{é secante} \end{array} \right.$$

$$T \left[\; (PC^2) = PA \cdot PB \right.$$



Demonstração:

Considerando os triângulos PAC e PCB:

$$\hat{P} \cong \hat{P} \text{ (ângulo comum)}$$

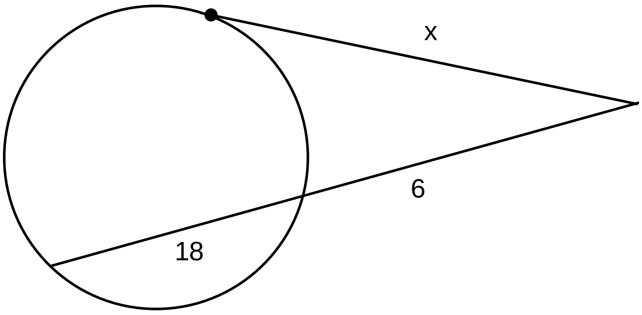
$$\hat{A} \cong \hat{C} \left(\frac{\overline{BC}}{2} \right)$$

Logo, Δ PAC ~ Δ PCB.

Então: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PC}{PB} \Rightarrow \boxed{(PC)^2 = PA \cdot PB}$

Exercícios:

1) Calcular o valor de **x** na figura:



Solução:

$x^2 = (18 + 6) \ . \ 6$

$x^2 = 24 \ . \ 6$

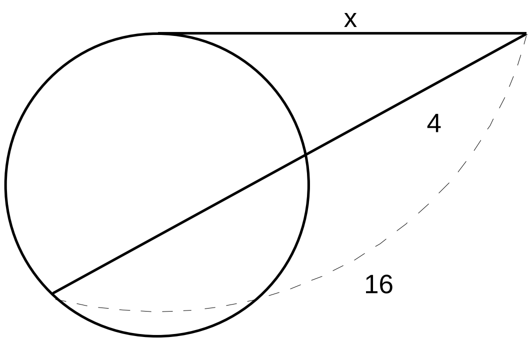
$x^2 = 144$

$x^2 = \sqrt{144}$

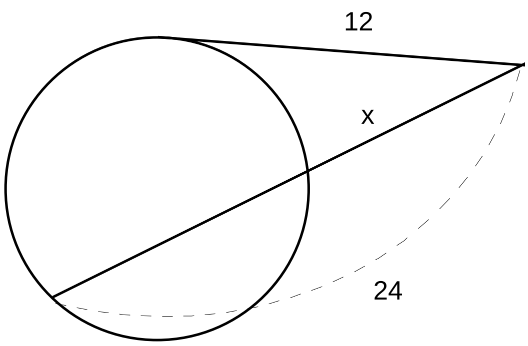
$x^2 = 12$

2) Calcule o valor de **x** nas seguintes figuras:

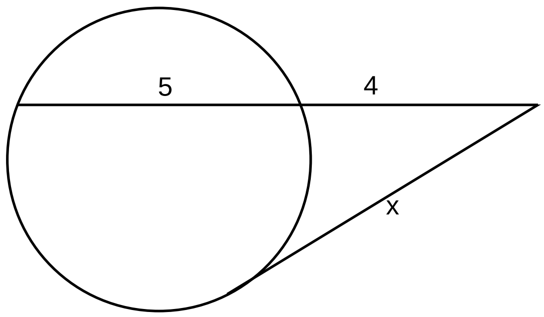
a)



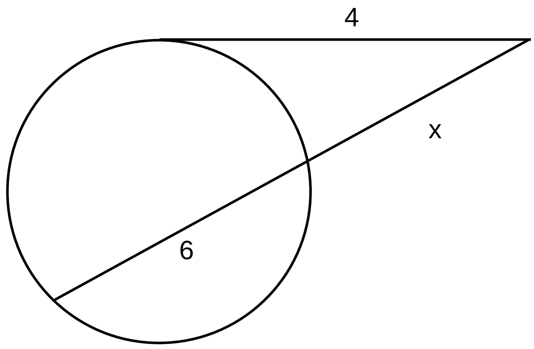
b)



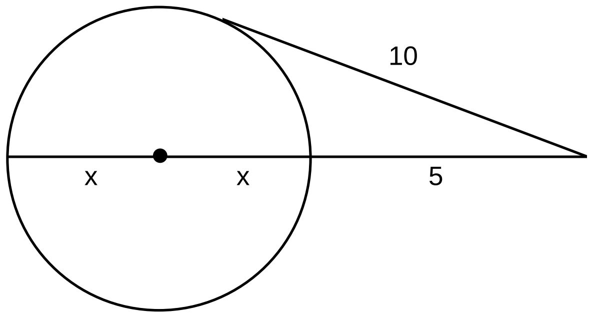
c)



d)

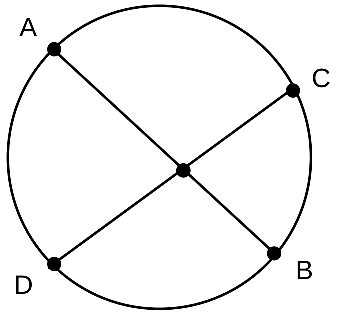


e)



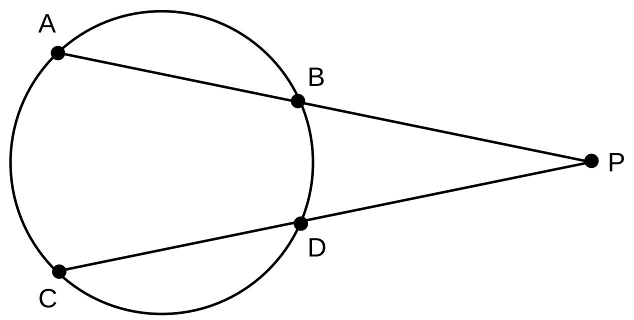
RESUMO

1



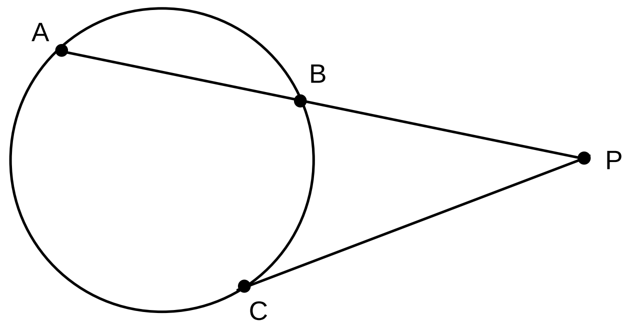
$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$

2



$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$

3

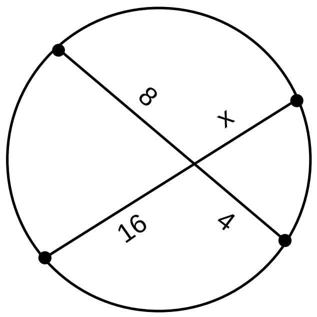


$\boxed{(PC)^2 = PA \cdot PB}$

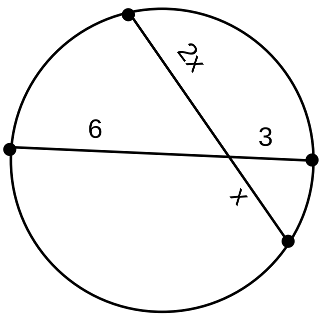
Exercícios:

1) Calcule o valor de **x** nas seguintes figuras:

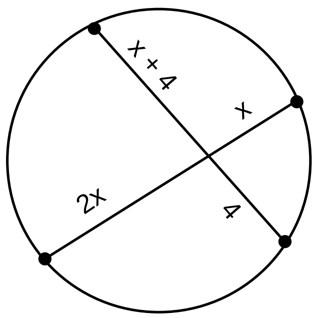
a)



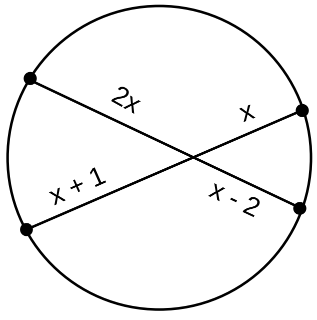
b)



c)



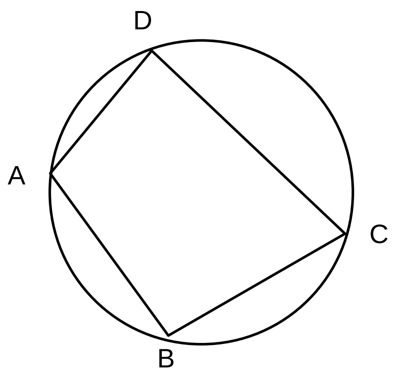
d)



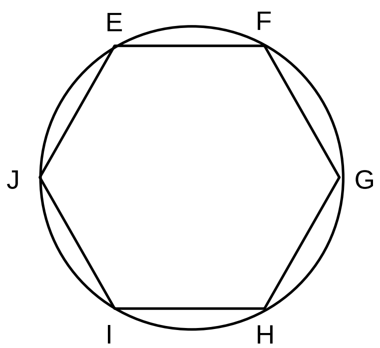
Polígono inscrito numa circunferência

Dizemos que um polígono é ***inscrito*** quando todos os seus vértices pertencem à circunferência.

Veja:



Quadrilátero inscrito



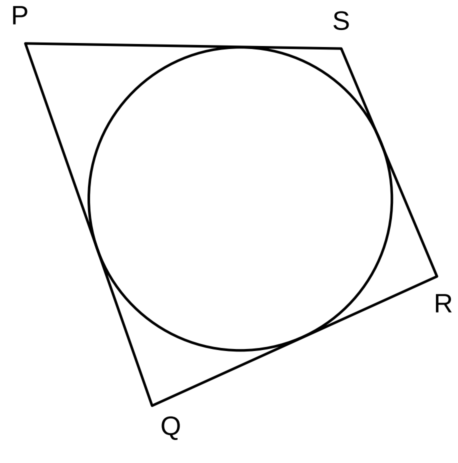
Hexágono inscrito

A circunferência está circunscrita ao polígono.

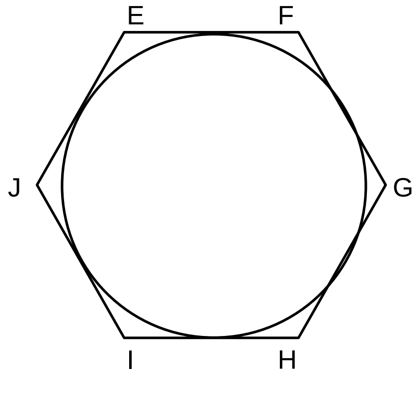
Polígono circunscrito a uma circunferência

Dizemos que um polígono é ***circunscrito*** quando todos os seus lados são tangentes à circunferência.

Veja:



Quadrilátero circunscrito



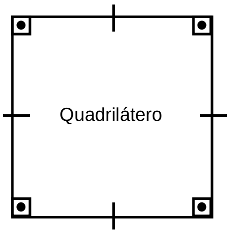
Hexágono circunscrito

A circunferência está inscrita no polígono.

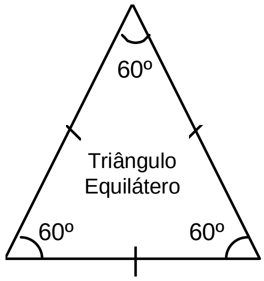
Polígono Regular

Um polígono é ***regular*** quando tem os lados congruentes e os ângulos congruentes.

Veja:



- ***4 lados congruentes.***
- ***4 ângulos congruentes***

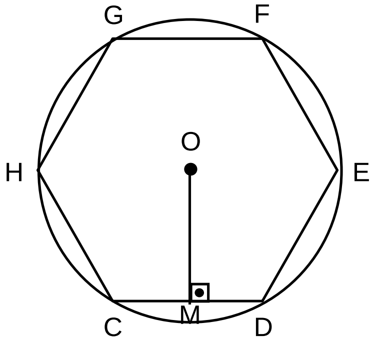


- ***3 lados congruentes.***
- ***3 ângulos congruentes.***

Os polígonos ***regulares*** podem ser inscritos ou circunscritos a uma circunferência.

Apótema de um Polígono Regular

Apótema é o segmento cujas extremidades são o centro e o ponto médio do lado.

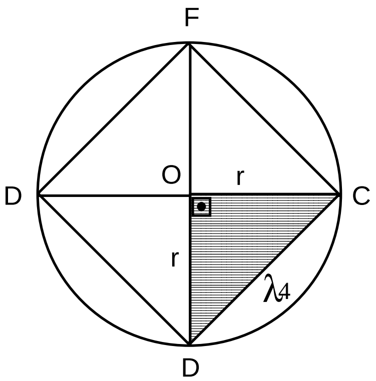


$\overline{OM}$ é o *apótema.*

Relações Métricas no Polígonos Regulares

1) QUADRADO

a) Cálculo da medida do lado (λ_4)



No Δ COD, temos:

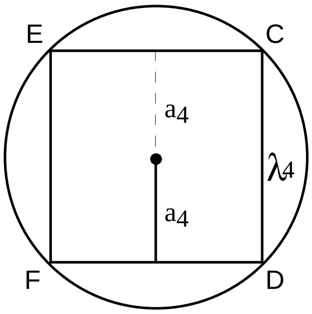
$\lambda_4^2 = r^2 + r^2$

$\lambda_4^2 = 2r^2$

$\lambda_4^2 = \sqrt{2r^2}$

$\boxed{\lambda_4^2 = r\sqrt{2}}$

b) Cálculo da medida do apótema (a_4)



Na figura, observe que:

$a_4 = \dfrac{\lambda_4}{2}$

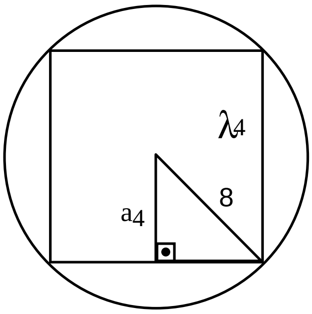
como $\lambda_4 = r\sqrt{2}$

$\boxed{\text{então: } a_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

Exercícios:

1) Calcular a medida do lado e do apótema do quadrado inscrito numa circunferência de raio 8cm.

Solução:



$\boxed{\text{a) } \lambda_4 = r\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda_4 = 8\sqrt{2}$

$\boxed{\text{b) } a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow a_4 = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = 4\sqrt{2}$

Resposta: o lado mede $8\sqrt{2}$ cm e o apótema $4\sqrt{2}$ cm.

2) Calcule o lado de um quadrado inscrito numa circunferência de raio de 6cm.

3) Calcule o lado de um quadrado inscrito numa circunferência de raio de 5 $\sqrt{2}$ cm.

4) Calcule o apótema de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 5 $\sqrt{8}$ cm.

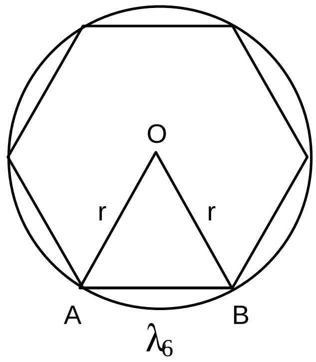
5) O lado de um quadrado inscrito numa circunferência mede 10 $\sqrt{2}$ cm. Calcule o raio da circunferência.

6) Calcule o lado e o apótema de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 12 $\sqrt{2}$ cm.

7) A medida do apótema de um quadrado inscrito numa circunferência é 15cm. Calcule o raio da circunferência.

2) HEXÁGONO REGULAR

a) Cálculo da medida do lado (λ_6)



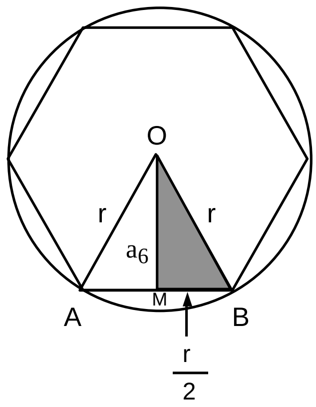
O Δ AOB é equilátero.

Logo: $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}$

$\boxed{\text{Então: } \lambda_6 = r}$

b) Cálculo da medida do apótema (a_6)

No Δ MOB, temos: $a_6^2 + \left(\dfrac{r}{2}\right)^2 = r^2$



$a_6^2 = r^2 - \dfrac{r^2}{4}$

$a_6^2 = \dfrac{3r^2}{4}$

$a_6^2 = \sqrt{\dfrac{3r^2}{4}}$

$\boxed{a_6^2 = \dfrac{r\sqrt{3r}}{2}}$

Exercícios:

1) Determinar a medida do lado e do apótema do hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 8cm.

Solução:

a) Como $\boxed{\lambda_6 = r}$, então $\lambda_6 = 8$

b) $a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a_6 = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Resposta: o lado mede 8cm e o apótema $4\sqrt{3}$ cm.

2) Calcule as medidas do lado e do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $12\sqrt{3}$ cm.

3) Determine o perímetro de um hexágono regular inscrito numa circunferência de 7cm e de raio.

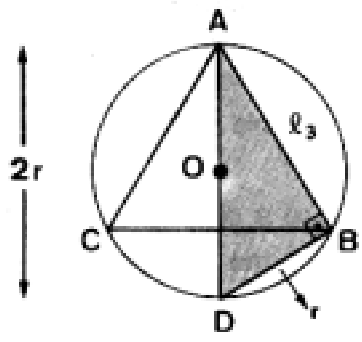
4) O apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência mede 15cm. Quanto mede o seu lado ?

5) O lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência mede $2\sqrt{27}$ cm. Quanto mede o seu lado ?

6) O apótema de um hexágono regular mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine o perímetro do hexágono.

3) TRIÂNGULO EQUILÁTERO

a) Cálculo da medida do lado (λ_3)



No Δ ABD, temos:

$\lambda_3^2 + r^2 = (2r)^2$ (Teorema de Pitágoras)

$\lambda_3^2 + r^2 = 4r^2$

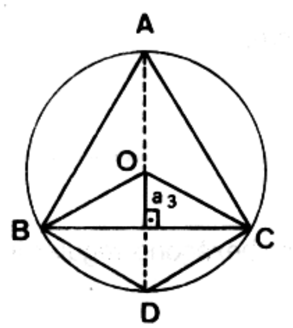
$\lambda_3^2 = 3r^2$

$\lambda_3 = r\sqrt{3r^2}$

$$\boxed{\lambda_3 = r\sqrt{3}}$$

b) Cálculo da medida do apótema (a_3)

No Δ MOB, temos: $a_6^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$



O quadrilátero BCDO é um losango, pois os lados são congruentes (medem r).

$a_3 = \frac{\overline{OD}}{2} \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{r}{2}}$

Exercícios

1) Determine o lado e o apótema do triângulo equilátero numa circunferência de raio 10cm.

Solução:

a) $\lambda_3 = r\sqrt{3} \Rightarrow \lambda_3 = 10\sqrt{3}$

b) $a_3 = \dfrac{r}{2} \Rightarrow a_3 = \dfrac{10}{2} = 5$

Resposta: o lado mede $10\sqrt{3}$ cm e o apótema 5cm.

2) Calcule o lado de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio $\sqrt{12}$ cm.

3) Calcule o apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio 26cm.

4) O lado de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência mede 12cm. Calcule o raio da circunferência.

5) O lado de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência mede 18cm. Quanto mede o seu apótema ?

RESUMO

Polígono inscrito	***Lado***	***Apótema***
Quadrado	$\lambda_4 = r\sqrt{2}$	$a_4 = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$
Hexágono regular	$\lambda_6 = r$	$a_6 = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$
Triângulo equilátero	$\lambda_3 = r\sqrt{3}$	$a_3 = \dfrac{r}{2}$

Exercícios:

1) Calcule o lado de quadrado inscrito numa circunferência de raio $3\sqrt{2}$ cm.

2) Calcule o apótema de um de quadrado inscrito numa circunferência de raio $7\sqrt{8}$ cm.

3) O apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência mede 30cm. Quanto mede o seu lado ?

4) O apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência mede 5cm. Calcule o perímetro do triângulo equilátero.

5) Calcule o perímetro de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio $2\sqrt{3}$ cm.

Área de Polígonos

Considerações Iniciais

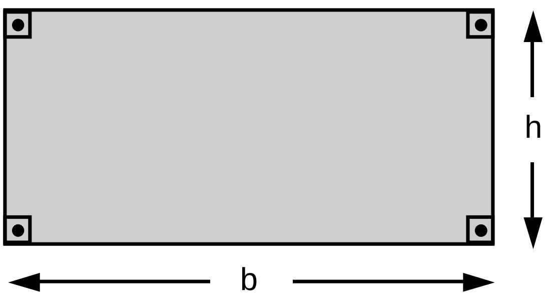
- ***Superfície*** de um polígono é a reunião do polígono com o seu interior.
- ***Área*** de um polígono é a medida da superfície desse polígono.

Nota: Por comodidade, a área da superfície de um polígono será denominada ***área de um polígono***.

- Dois polígonos se dizem equivalentes se têm a mesma área.

Áreas dos principais polígonos

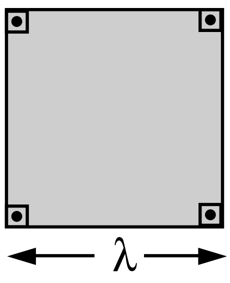
RETÂNGULO



Área = base x altura

A = **b** x **h**

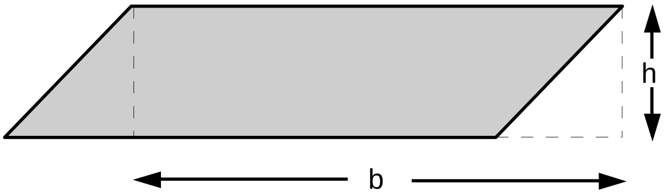
QUADRADO



Área = lado x lado

A = $\lambda \times \lambda = \lambda^2$

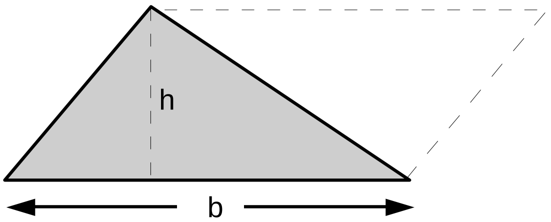
PARALELOGRAMO



Área = base x altura

$$\mathbf{A} = \mathbf{b} \times \mathbf{h}$$

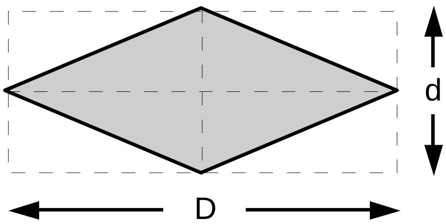
TRIÂNGULO



Área = base x altura : 2

$$\mathbf{A} = \mathbf{b} \times \mathbf{h} : \mathbf{2}$$

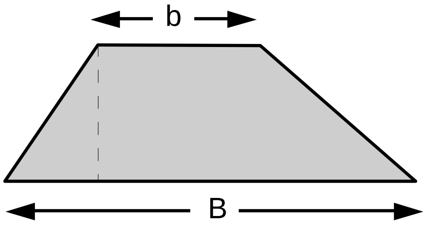
LOSANGO



Área = Diag. maior x diag. menor : 2

$$\mathbf{A} = \frac{D \times d}{2}$$

TRAPÉZIO



Área = (B. maior x b.menor) x altura : 2

$$\mathbf{A} = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Nota:

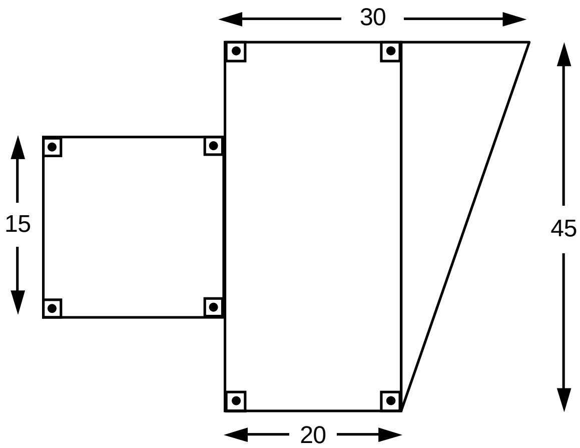
Nas fórmulas, para facilitar, usamos apenas a palavra:

- lado em vez de medida do lado.

- base em vez de medida da base, e assim por diante.

Exercícios:

1) Calcular a área da figura abaixo, supondo as medidas em centímetros.



Solução:

a) Área do quadrado: A = 15 . 15 $\Rightarrow$ A = 225

b) Área do retângulo: A = 20 . 45 $\Rightarrow$ A = 900

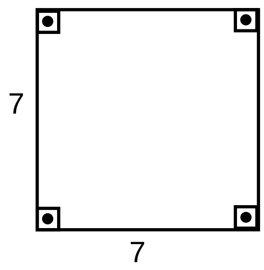
c) Área do triângulo: $A = \dfrac{45 \, . \, 10}{2} \Rightarrow A = 225$

d) Área total: A = 225 + 900 + 225 = 1350

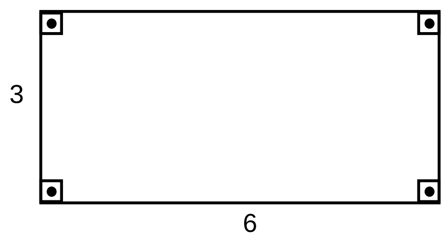
Resposta: 1.350 m^2

2) Calcule a área das figuras, supondo as medidas em cm:

a)

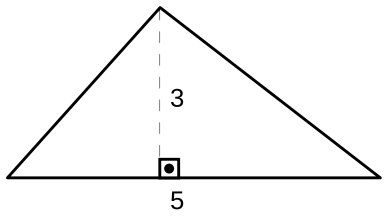


b)

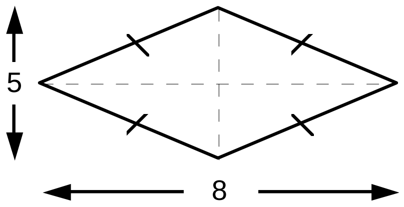


c)

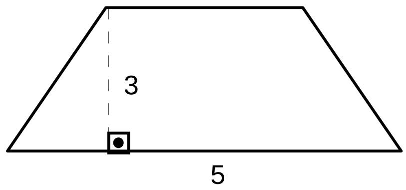
d)



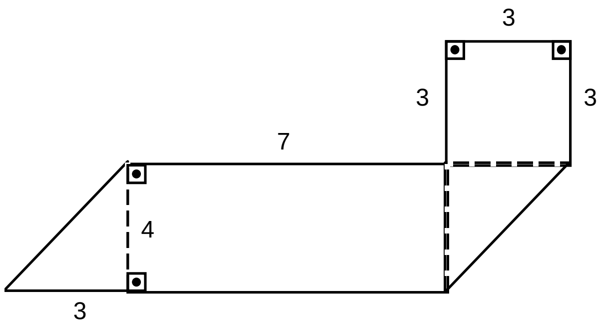
e)



f)

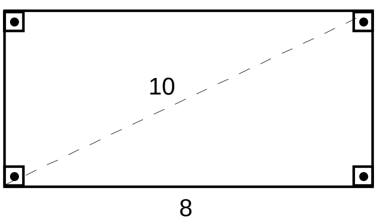


3) Calcule a área da figura, supondo as medidas em cm:

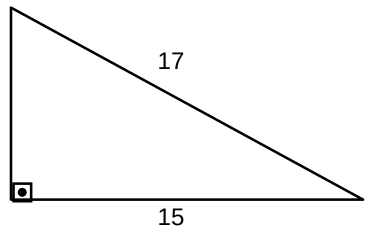


4) Calcule a área dos polígonos, supondo as medidas em cm:

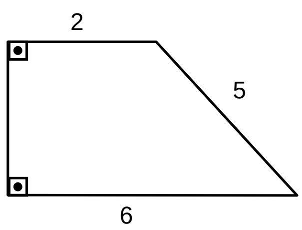
a)



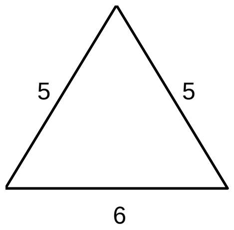
b)



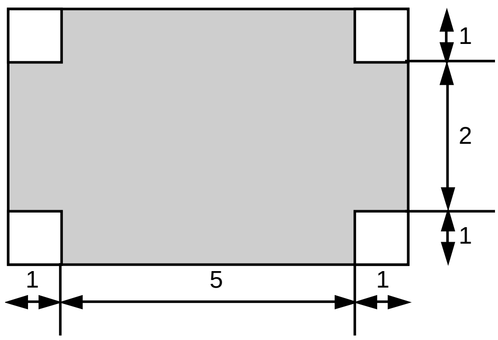
c)



d)



5) Calcule a área da região sombreada, supondo as medidas em cm:

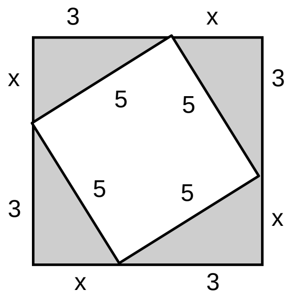


6) Na figura, calcule:

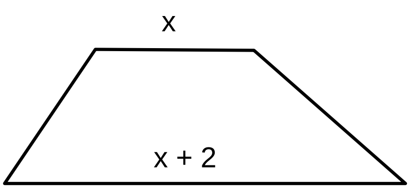
   a) a área do quadrado menor.

   b) a área do quadrado maior.

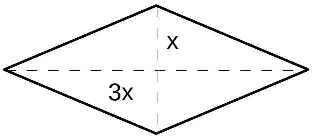
   c) a área da região sombreada.



7) A área do trapézio da figura abaixo mede $42cm^2$ e a sua altura 3cm. Calcule o valor de x.



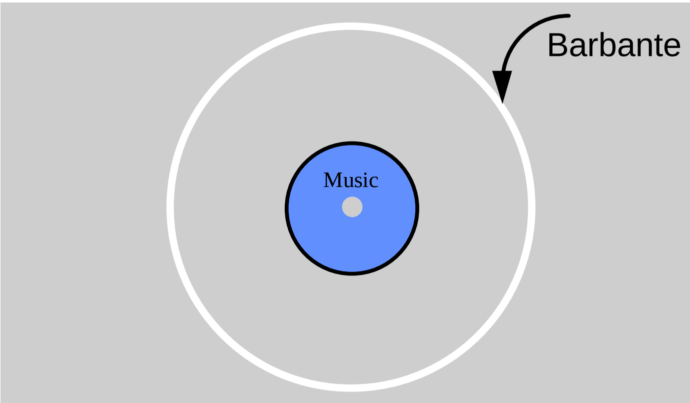
8) O perímetro do losango da figura abaixo é 40cm. Calcule a área desse losango.



Medida da circunferência e área do círculo

Comprimento da Circunferência

Coloque um disco sobre uma mesa e com um barbante dê a volta completa no mesmo.



A seguir, estique o barbante e meça o seu comprimento. Calculando a razão entre as medidas do barbante e do diâmetro do disco, vamos ter aproximadamente:

$$\frac{\text{comprimento do barbante}}{\text{diametro do disco}} = 3{,}14$$

Este número é representado pela letra grega π (lê-se **pi**).

Então:

$$\frac{C}{2r} = \pi \quad \text{ou} \quad \boxed{C = 2\pi r}$$

Logo:

O comprimento da circunferência é igual a 2π vezes o raio da mesma.

Nota:

A razão acima não é exata, pois o número π que a representa é um número irracional.

$$\pi = 3{,}14159\ ...$$

Na prática usamos o π com o valor de 3,14.

Exercícios:

1) Calcule o comprimento de uma circunferência quando:

   a) o raio mede 2cm

   b) o raio mede 2,5cm

   c) o diâmetro mede 8cm

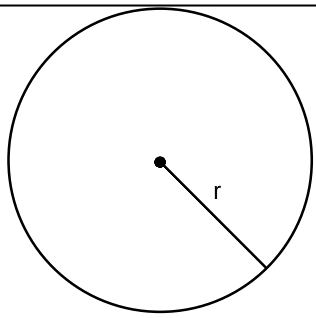
2) Uma circunferência tem 31,40cm de comprimento. Quanto mede seu raio ?

3) Uma circunferência tem 18,84cm de comprimento. Quanto mede seu diâmetro ?

4) Quantas voltas dá uma roda 30cm de raio para percorrer 7536m?

Área do círculo e de suas partes

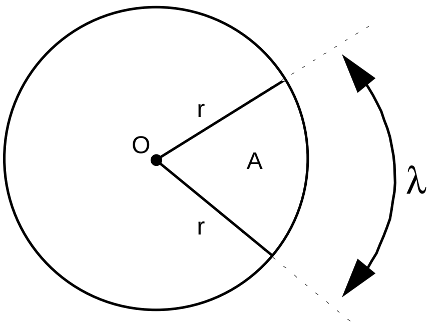
CÍRCULO



$A = \pi r^2$ (r $\rightarrow$ raio)

SETOR CIRCULAR

a)



Indicamos:

r $\rightarrow$ raio

λ $\rightarrow$ comprimento do arco

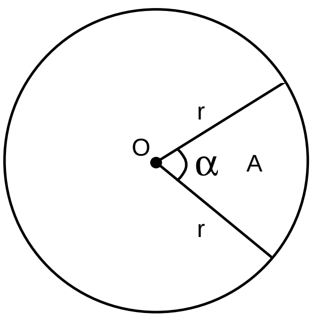
A $\rightarrow$ área do setor

Formando a regra de três:

arco	**área**
$2 \pi r$	πr^2
λ	A

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\lambda \cdot r}{2}$$

b)



Indicamos:

r $\rightarrow$ raio

α $\rightarrow$ ângulo do setor

A $\rightarrow$ área do setor

Formando a regra de três:

ângulo	**área**
360º	πr^2

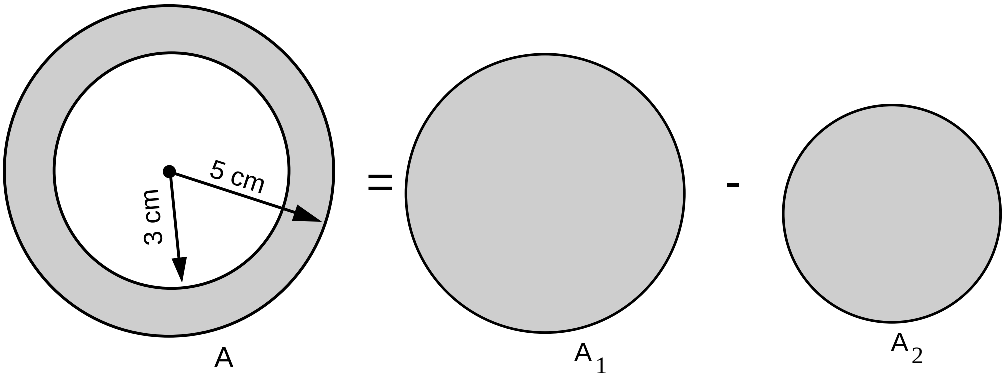
$$\Rightarrow \quad A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^o}$$

α^o ________ A	

Exercícios:

1) Calcule a área de uma coroa circular de raios 3cm e 5cm.

Solução:



Calculando as áreas dos círculos A_1 e A_2:

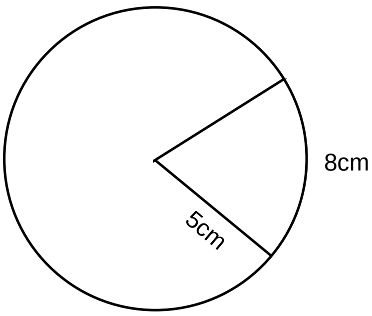
$A_1 = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A_1 = 25\pi$

$A_2 = \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_2 = 9\pi$

Então: $A = 25\pi - 9\pi$

$A = 16\pi$ Resposta: 16π cm^2.

2) Calcule a área do setor:

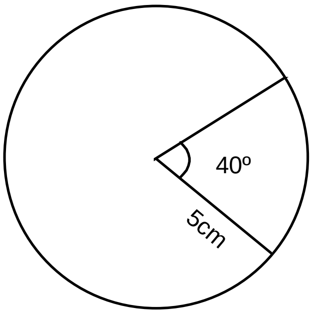


Solução:

$$\boxed{A = \frac{\lambda \cdot r}{2}} \Rightarrow A = \frac{8 \cdot 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Resposta: 20 cm^2.

3) Calcule a área do setor:



Solução:

$$\boxed{A = \frac{\pi r^2 \alpha^o}{360^o}} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 40^o}{360^o}$$

$$A = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 40^o}{360^o}$$

$$A = \frac{25\pi}{9}$$

Resposta: $\frac{25\pi}{9}$ cm^2.

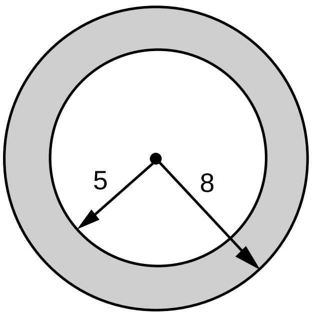
4) Calcule a área de um círculo de raio 5cm.

5) Calcule a área de um círculo de diâmetro 6cm.

6) Calcule o raio de um círculo de área 64 π cm^2.

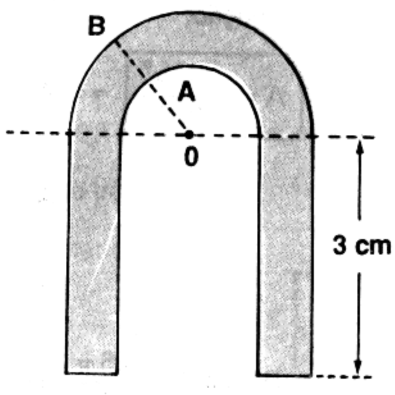
7) Calcule a área de um círculo cuja circunferência tem comprimento de 18 π cm.

8) Calcule a área de uma coroa circular de raios 8cm e 5cm.



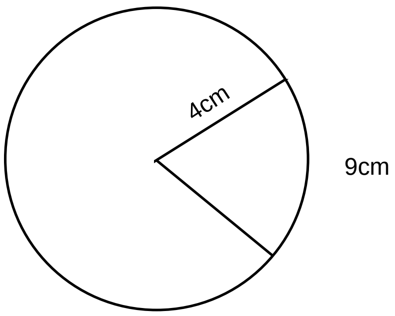
9) Dois círculos concêntricos têm 6cm e 4cm de raio. Calcule a área da coroa circular.

10) Calcule a área da figura sombreada, sabendo que OA = 0,5
e OB = 1,5cm.

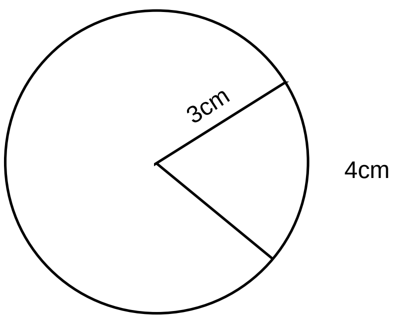


11) Calcule a área do setor circular.

a)

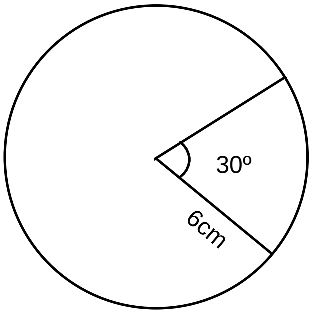


b)

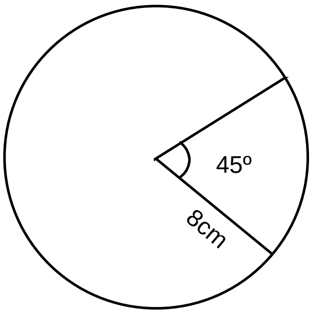


12) Calcule a área do setor circular.

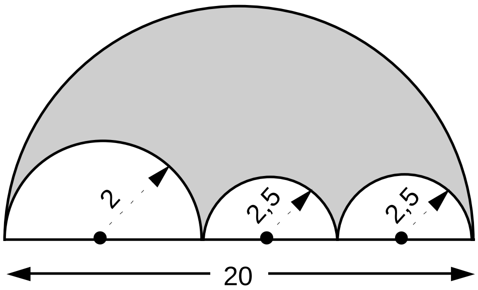
a)



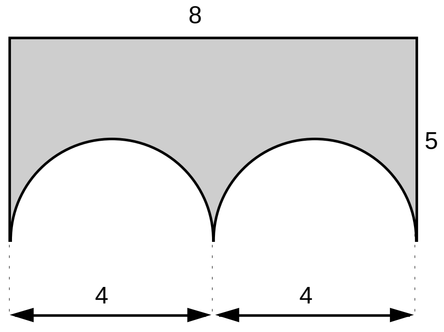
b)



13) Calcule a área da parte escura da figura, supondo as medidas em cm.

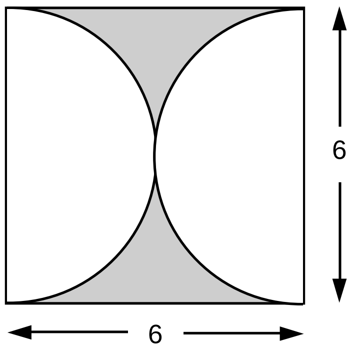


14) Calcule a área da parte escura da figura, supondo as medidas em m.

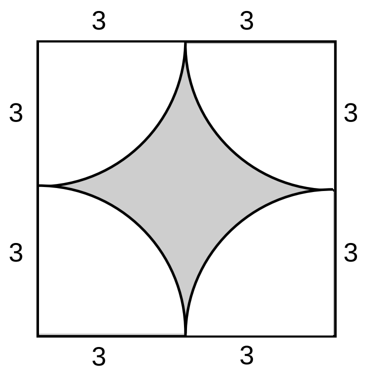


15) Calcule a área das partes escuras das figuras, supondo as medidas em centímetros.

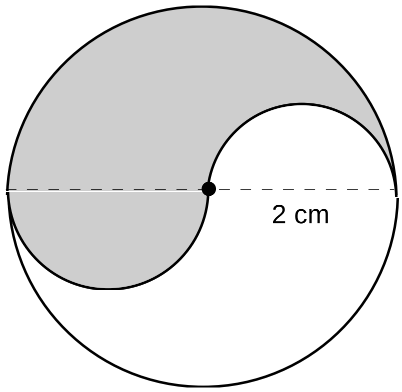
a)



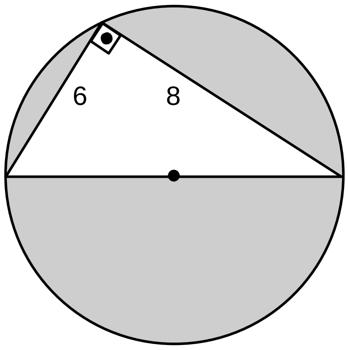
b)



16) Calcule a área da parte escura da figura.



17) Calcule a área da parte escura da figura, supondo as medidas em centímetros.



Bibliografia

1. CASTRUCCI, B., PERETTI, R.G. e GIOVANNI, J.R. - "Matemática - 5ª série", Ed. FTD S.A., S.P., 1ª edição, 1978.

2. ANDRINI, A. - "Praticando Matemática - 7ª série", Editora do Brasil S.A., S.P., 1ª edição, 1989.

2. ANDRINI, A. - "Praticando Matemática - 8ª série", Editora do Brasil S.A., S.P., 1ª edição, 1989.