CENTRO DE ENSINO SUPERIOR

Avenida João Batista de Souza Soares, 4121 - Colônia Paraíso - São José dos Campos – SP

CEP: 12236-660

www.unianhanguera.edu.br

ALGEBRA LINEAR

ATPS de matrizes

Disciplina: Álgebra Linear

Profº. Tutor Presencial

Resumo

A ATPS de Álgebra Linear é constituída de 6 etapas, onde deverá ser entregue relatórios parciais, com os resultados das pesquisas realizadas em casa etapa e relatório final detalhado com o resultado de todos s passos da ATPS. Será abordada toda a matéria dada em sala de

Sumario

1. Introdução

Muitas vezes na ciência e na matemática a informação é organizada em linhas e colunas, formando agrupamentos retangulares chamados matrizes. Podem ser tabelas de dados numéricos surgidos de observações físicas, mas também ocorrem em vários contextos matemáticos; contudo, as matrizes não são simplesmente umas ferramentas de noção para resolver sistemas de equações lineares, elas também podem ser vistas como objetivos matemáticos de vida própria, existindo uma teoria rica e importante a ela associada que tem uma grande variedade de aplicações.

Foi apenas em meados do SÉCULOXIX que as matrizes tiveram sua importância detectada e saíram da sombra dos determinantes. O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Cauchy, por volta de 1.826. Ele as chamou de tableau (tabela).

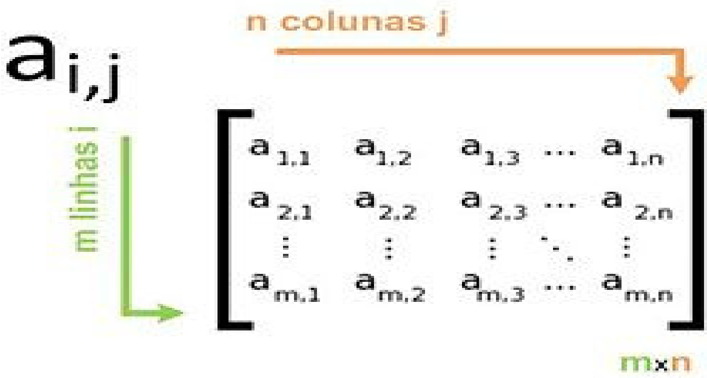
O nome Matriz só veio com James Joseph Sylvester, 1.850. Seu amigo Cayley, com sua famosa Memoir on the theory of Matrices, 1.858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade. O significado da palavra matriz é: local onde algo se gera ou cria.

Sylvester as via como "um bloco retangular de termos... o que representa um determinante, mas é como se fosse uma **Matriz** a partir da qual podemos formar vários sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolher à vontade p linhas e p colunas...". Observe que Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. É só com Cayley que elas passam a ter vida própria, gradativamente, começam a suplantar os determinantes em importância. A referência mais antiga a matrizes, entretanto, data de aproximadamente do ano 2.500 a.C., no livro chinês Chui-Chang Suan-Shu (Nove capítulos sobre a arte matemática). Este livro apresenta problemas sobre a mensuração de terras, agricultura, impostos, equações, etc. Um destes problemas é resolvido com cálculo efetuado sobre uma tabela, tais como efetuamos hoje com as matrizes. Atualmente, as matrizes são muito utilizadas em áreas de conhecimento. Suas aplicações se dão na Matemática, Física, Engenharia e Computação.

ETAPA 1º

2. Definição de uma matriz

Uma matriz é uma tabela retangular de números, ou de outro tipo de objetos matemáticos, dispostos em **m** linhas (filas horizontais) e **n** colunas (filas verticais). Dizemos assim que a matriz possui ordem **m x n** (lê-se ordem **m** por **n**).



Aij ➔ A = matriz I = elemento linha J = elemento coluna

3. Apresentação de uma matriz

Representamos uma matriz colocando os dados da tabela entre parênteses ou entre colchetes.

Exemplo

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 & -7 \end{bmatrix}$ **,** A é uma matriz de 1 linha e cinco coluna (matriz de ordem 1x5)

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix}$ **,** B é uma matriz de 5 linhas e 1 coluna (matriz de ordem 5x1).

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -7 & 5 \\ 9 & 15 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ **,**C é uma matriz de ordem 3 linhas e 4 colunas (matriz 3x4).

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ **,** D é uma matriz 3 linhas e 3 colunas (matriz 3x3).

4. Tipos de matrizes

Definição: Existem matrizes que, por apresentarem características notáveis, merecem destaque. Vejamos a seguir algumas delas.

4.1. Matriz Linha

Definição: Recebe o nome de Matriz linha toda matriz que possui apenas uma linha. O número de colunas é independente.

Exemplo

A = [a11 a12... an], matriz de ordem 1x n

B = [-5 1 2], é uma matriz de ordem 1 x 3

C = [4 -6 7 -9], é uma matriz de ordem 1 x 4

4.2. Matriz Coluna

Definição: Recebe o nome de Matriz coluna toda matriz que possuir apenas uma coluna. O número de linhas é independente.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a11} \\ \mathbf{a21} \\ \vdots \\ \mathbf{am} \end{pmatrix}$$ **,** matriz de ordem m x1

Exemplo

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$ **,** é uma matriz de ordem 4 x1.

4.3. Matriz Quadrada

Definição: É toda matriz que o mesmo número de linhas é o de colunas.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a11} & \mathbf{a12} & \mathbf{...} & \mathbf{a1n} \\ \mathbf{a21} & \mathbf{a22} & \mathbf{...} & \mathbf{a2n} \\ \mathbf{:} & \mathbf{:} & \mathbf{...} & \mathbf{:} \\ \mathbf{an1} & \mathbf{an2} & \mathbf{...} & \mathbf{an3} \end{pmatrix}$$

Nota 1. A ordem da matriz quadrática é n x n ou, simplesmente, n.

4.3.1. Diagonal principal

Numa matriz quadrada A= [aij] de ordem n, os elementos aij, em que i-j, constitui a diagonal principal.

Assim, em 1.1, os elementos a11, a22, a33,...., ann constituem a diagonal principal.

Nota 2. Seja A=[aij] n x n uma matriz quadrada de ordem n.Denomina-se traço da matriz A, a soma a11+a22+a33+.....+ann dos elementos da diagonal principal de A,o qual indicamos por TR (A). Desse modo temos:

4.3.2. Diagonal Secundária

Definição: Numa matriz quadrada A= [aij] de ordem n, os elementos aij, em que i+j = n+1, constituem a diagonal secundária da matriz.

Assim em 1.1, os elementos a1n, a2n-1, a3n-2,..., an1 constituem a diagonal secundária.

Exemplo

A matriz $$M = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -1 \\ 6 & 4 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

É quadrada de ordem 3. Sua diagonal principal é {8,4,2} e sua diagonal secundária é {-1,4,2}. O traço da matriz M é dado por TR(M) =8+4+2=14.

Definição: Será uma matriz diagonal, toda matriz quadrada A = [aij], de ordem n e que tem os elementos aij = 0, quando i diferente de j, é chamada matriz diagonal, ou seja, é toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais à zero.

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a11} & \mathbf{a12} & \mathbf{...} & \mathbf{a1n} \\ \mathbf{a21} & \mathbf{a22} & \mathbf{...} & \mathbf{a2n} \\ \vdots & \vdots & \mathbf{...} & \vdots \\ \mathbf{an1} & \mathbf{an2} & \mathbf{...} & \mathbf{an3} \end{pmatrix}$$

4.5. Matriz Nula ou Zero

Definição: Recebe o nome de Matriz nula toda matriz que independentemente do número de linhas e colunas todos os seus elementos são iguais à zero.

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$ **,** é uma matriz de ordem 3 x 3.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **,** é uma matriz de ordem 2 x 3

5.6. Matriz Identidade ou Unitária

Definição: Para que uma matriz seja matriz identidade ela tem que ser quadrada e os elementos que pertencerem à diagonal principal devem ser iguais a 1, ou seja onde i=j, e o restante dos elementos iguais a zero.

Indica-se a matriz identidade de ordem n por In ou simplesmente por I.

Exemplo

$$\mathbf{I2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$ **,** é a matriz identidade de ordem 2.

$$\mathbf{I3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$ **,** é a matriz identidade de ordem 3.

4.7. Matriz Transposta

Definição: Chama-se transposta de $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ a matriz $A^t = [a'_{ji}]_{n \times m}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo i e todo j, ou seja, a transposta de A é a matriz obtida de A, trocando-se, "ordenadamente", suas linhas por colunas (ou, suas colunas por linhas).

Indica-se matriz transposta de A por At.

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{At} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [\,3 \quad -2 \quad -1 \quad 7\,] \Rightarrow \mathbf{Bt} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4.8. Matriz Simétrica

Definição: Uma matriz quadrada A = [aij] n x n é dita simétrica se aij = aji.

Nota 3. Observe que:

(a) A é simétrica se At = A;

(b) No caso de uma matriz simétrica, a parte superior é uma "reflexão" da parte inferior, em relação à diagonal principal.

Exemplo

São simétricas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b} & \mathbf{e} & \mathbf{f} & \mathbf{g} \\ \mathbf{c} & \mathbf{f} & \mathbf{h} & \mathbf{i} \\ \mathbf{d} & \mathbf{g} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \end{pmatrix}$$

4.9. Matriz Anti-Simétrica

Definição: Uma matriz quadrada A = [aij]n x n diz-se anti-semétrica quando aij = - aij, para todo i, j elementos {1, 2, 3,..., n}.

Assim

I. Os elementos da diagonal principal são todos nulos;

J. Os elementos simétricos dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

Nota 4. Observe que a matriz quadrada A é anti-simétrica de ordem n se, e somente se,

$$\mathbf{At = - A}$$

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -7 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -b & c & -d \\ b & 0 & -f & g \\ -c & f & 0 & -1 \\ d & -g & i & 0 \end{pmatrix}$$

4.10. Matriz Triangular Superior

Definição: A matriz quadrada A = [aij] n x n' que tem os elementos aij = 0. Para i > j, é chamada de triangular superior, ou seja, quando todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

4.11. Matriz triangular Inferior

Definição: A matriz quadrada A = [aij]n x n' que tem os elementos aij = 0, para i < j, é chamada de triangular inferior, ou seja, quando todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

4.12. Matriz Oposta

Definição: Sabemos que, para encontrar a matriz oposta de uma matriz qualquer basta trocar os sinais dos elementos.

Exemplo

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 50 & -11 \\ -63 & 7 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow -\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -50 & 11 \\ 63 & -7 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$$

É uma matriz oposta da ordem 2 x 3.

Etapa 2º

5. Matrizes e Determinantes

Com o PLT de Álgebra Linear no capitulo de Determinante na pág. 268 a 309.

O livro mostra o conteúdo com outras palavras, totalmente diferentes do da sala de aula. Com uma linguagem de certo modo mais complicada, a mesma coisa, mas com outras palavras. È mais fácil estudar pelos slides apresentado em sala de aula e disponibilizado pelo professor.

O Determinante de uma Matriz é um número relacionado a uma matriz quadrada, é a soma algébrica dos produtos que se obtêm efetuando todas as permutações dos segundos índices do termo principal, fixados os primeiros índices, e fazendo-se proceder aos produtos do sinal + ou -, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou impar.

Representação:

Det. A= |A| onde **A= [ij]n**

5.1 Calculo de Determinante de Segunda Ordem (2x2)

Det. A= $\begin{pmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$ **= a11 * a22 – a12 * 21** **Obs.: ↘ = + e ↙ = -**

Exemplos

Det. A = $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **= 5*5 – 3*4= 25 – 12= 17** **DDet. A=** $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ **= 8*4 – 5*7= 32 – 35= -3**

5.2 Calculo de Determinante de Terceira Ordem (3x3)

$$\textbf{Det. A=}\left(\begin{array}{ccc} \mathbf{a11} & \mathbf{a12} & \mathbf{a13} \\ \mathbf{a21} & \mathbf{a22} & \mathbf{a23} \\ \mathbf{a31} & \mathbf{a32} & \mathbf{a33} \end{array}\right)\begin{array}{cc} \mathbf{a11} & \mathbf{a12} \\ \mathbf{a21} & \mathbf{a22} \\ \mathbf{a31} & \mathbf{a32} \end{array}$$

d1 d2 d3 D2 D1

D1

D1= a11 * a22 * a33

D2= a12 * a23 * a31

. . . .

. . . .

. . . .

Det. A= D1 + D2 + D3 - (d1 + d2 + d3)

Obs.: $\searrow$ = + e $\swarrow$ = -

Exemplos

$$\text{Det. A=}\left|\begin{array}{ccc} 5 & 7 & 0 \\ 4 & 8 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 5 & 7 \\ 4 & 8 \\ 3 & 0 \end{array}$$

= D1 + D2 + D3 – (d1 + d2 + d3)

= 5*8*2 + 7*9*3 + 0*4*0 – (0*8*3 + 5*9*0 + 7*4*2)

=80 +189 + 0 – (0 + 0 + 56)= 269 – 56= 213

$$\text{Det. A=}\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{array}$$

= D1 + D2 + D3 – (d1 + d2 + d3)

= 1*5*9 + 2*6*7 + 3*4*8 – (3*5*7 + 1*6*8 + 2*4*9)

=45 + 84 + 96 – (105 + 48 + 72)= 225 – 225= 0

$$\text{Det. A=}\left|\begin{array}{ccc} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right|\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{array}$$

= D1 + D2 + D3 – (d1 + d2 + d3)

= (-1)*0*9 + 2*6*7 + (-3)*4*8 – (3*0*7 + (-1)*6*(-8) + 2*4*9)

=0 + 84 - 96 – (0 + 48 + 72)= 84 – 96 – 120= - 132

5.3 Principais Propriedades de Determinantes

Det. A = Det. A^t

Exemplo

Det. A= $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ Det. A = 5*3 – 2*4= 15 – 8 = 7

Det. A^t = $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Det. A^t = 5*3 – 4*2= 15 – 8= 7

- **Det. *I* = 1**

Exemplo

Det. *I*= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Det. *I* = 1*1 – 0*0= 1 – 0= 1

- **Se a matriz possui uma linha ou coluna com todos os elementos nulos, o determinante é nul:**

Exemplo

A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{matrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{matrix}$ Det. A= 0+0+0 - (0+0+0)= 0

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{matrix}$$

Det. B= 0+0+0 – (0+0+0)= 0

- **Se a matriz A tem duas linhas ou 2 colunas iguais, o determinante é nulo.**

Exemplo

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{matrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{matrix}$$

Det. A= 90+20+24 – (24+20+90)= 134+134= o

Etapa 3º e 4º

6. Sistemas de Equações Lineares

6.1. Equação linear

Equação linear é toda equação da forma

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + ... + a_{1n}x_n = b_1$

Em que a_{11}, a_{12}, a_{13},... , a_{1n} são números reais, que recebem o nome de *coeficientes* das *incógnitas*; x_1, x_2, x_3,... , x_n, são as incógnitas; e b_1 é um número real chamado *termo independente* (quando b=0, a equação recebe o nome de *linear homogênea*).

6.2. Solução de uma equação linear

Uma seqüência de números reais ($\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$,..., $\mathbf{r_n}$) é solução da equação linear

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + ... + a_{1n}x_n = b_1$

se trocarmos cada x_i por $\mathbf{r}_i$ na equação e este fato implicar que o membro da esquerda é identicamente igual ao membro da direita, isto é:

$a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + a_{13}r_3 + ... + ... + a_{1n}r_n = b_1$

Sistemas de Equações Lineares

Um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um sistema linear de **m** equações e **n** incógnitas.

6.3. Solução De um Sistema Linear

Os valores das variáveis que transformam simultaneamente as equações de um sistema linear em identidade, isto é, que satisfazem a todas as equações do sistema, constituem sua solução. Esses valores denominados *raízes* do sistema de equação lineares.

6.4. Classificação e Utilização de um Sistema Linear

Todo Sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções apresentados por ele:

SPD: Sistema Possível e Determinado – Possui apenas uma solução

SPE: Sistema Possível e Indeterminado – Possui infinitas soluções

SI: Sistema Impossível – não possui solução

E utilizado em resolução de 2 ou mais variáveis; resolução de sistemas parametrizados; calculo multivetorial (“3D”).

6.5. Matrizes Associadas a um Sistema Linear

Matriz Completa: matriz B que se obtém acrescentando à matriz incompleta uma última coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 4x+y+z=7 \\ -2x+y+z=4 \end{cases} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Matriz dos Termos Independentes

Matriz dos Coeficientes

Matriz das Variáveis

Etapa 5º

7. Regra de Cramer

Obs.: A regra de Cramer é uma das maneiras de resolver um sistema linear, mas só poderá ser utilizada na resolução de sistemas que o número de equações e o número de incógnitas forem iguais.

Portanto, ao resolvermos um sistema linear de n equações e n incógnitas para a sua resolução devemos calcular o determinante (D) da equação do sistema e depois substituímos os termos independentes em cada coluna e calcular os seus respectivos determinantes e assim aplicar a regra de Cramer que diz:

Os valores das incógnitas são calculados da seguinte forma:

$X1=\frac{D1}{D}$ $X2=\frac{D2}{D}$ $X3=\frac{D3}{D}$ ....$Xn=\frac{Dn}{D}$

Exemplo

Dado o sistema linear, $\begin{cases} X + 2y + z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$ podemos utilizar da regra de Cramer, pois ele possui 3 equações, ou seja, o número de incógnitas é igual ao número de equações.

- Devemos encontrar a matriz incompleta desse sistema linear que será chamada de A. Calculamos o determinante

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det. A= 1 + 6 + 2 + 3 – 1 + 4 =15

Det. A= 15

- Agora devemos substituir os tempos independentes na primeira coluna da matriz A, formando uma segunda matriz que será representada por Ax, e calculando o seu determinante em seguida.

$$Ax = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det. Ax= 8 + 4 + 3 + 2 – 8 + 6= 15

- Substituímos os termos independentes na segunda coluna da matriz incompleta formando a matriz Ay e calculando seu determinante.

$$Ay = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Det. Ay= -3 + 24 + 4 – 9 – 2 + 16= 30

Det. Ay= 30

- Substituímos os termos independentes do sistema na terceira da matriz incompleta formaremos a matriz Az e calculando seu determinante.

$$Az = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Det. Az= - 2 + 18 +16 + 24 - 3 – 8= 45

- Depois de ter substituído todas as colunas da matriz incompleta pelos termos independentes, iremos colocar em prática a regra de Cramer.

A incógnita x – $\dfrac{\text{Det Ax}}{\text{D}} = \dfrac{15}{15} = 1$

A Incógnita y – $\dfrac{\text{Det Ay}}{\text{D}} = \dfrac{30}{15} = 2$

A Incógnita z - $\dfrac{\text{Det Az}}{\text{D}} = \dfrac{45}{15} = 3$

Etapa 6º

8. Sistemas Lineares: Gauss-Jordan

Sistemas Equivalentes

São sistemas equivalentes quando dois sistemas de equações lineares admitem a mesma solução

Exemplo

Os sistemas lineares

$$S_1: \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$S_2: \begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ 6x + y = 20 \end{cases}$$

São equivalentes, pois ambos admitem o par ordenado (3, 2) como solução.

8.1Operações Elementares e Sistemas Equivalentes

Um sistema de equações lineares se transforma num sistema equivalente quando se efetuam as seguintes operações elementares:

1. Permutação de suas equações.
2. Multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero.
3. Substituição de equação, por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um número real diferente de zero.

9. Bibliografia

1. Llivro-texto: Steinbruch, F. Winterle, P. Álgebra Linear e Geometria Analítica. 2ª edição.

São Paulo: Pearson Education, 2007, PLT-Anhanguera Educacional. Sugestões bibliográficas:

2. **Algebra Linear** Com Aplicacoes - Chris Rorres, Howard A. Anton. 8º edição. Porto Alegre: BOOKMAN, 2001.

3. LAWSON, T. Algebra Linear. Editora Edgard Blucher LTDA, 1996.

4. BOLDRINI, J. L. Álgebra Linear. São Paulo: Harbra Editora, 1996.

HOWARD, A. Álgebra Linear com Aplicações. São Paulo: Bookman Companhia Editora, 1998.

5. KOLMAN, B. Introdução à Álgebra Linear com Aplicações. 6ª ed. Rio de Janeiro:

LTC editora, 2001.